

Министерство образования и науки РФ  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

Д. Е. Бурланков

**Анализ**  
**общей теории относительности**

*Монография*

Нижний Новгород  
Издательство Нижегородского государственного университета  
2011

УДК 530.12  
ББК В22.3  
Б-91

Рецензенты:

*В.В. Васькин* — к. ф.-м. н., зав. каф. теор. физики УдГУ;  
*Ю.С. Владимиров* — д. ф.-м. н., профессор МГУ,  
вице-президент Российского гравитационного общества;  
*С. Ю. Губанов* — к. ф.-м. н.

**Б-91 Бурланков Д. Е. Анализ общей теории относительности:** Монография. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. — 239 с.

ISBN 978-5-91326-172-4

Общая теория относительности (ОТО) базируется на двух принципах: 1. Принцип эквивалентности, приведший к геометрической трактовке эффектов тяготения и положивший начало многим принципиально новым идеям, таким как представление о *расширяющейся Вселенной*. 2. Принцип общей ковариантности, исключивший из физики объективное понятие *время*.

Цель работы: показать эффективность геометрической идеи ОТО, и тупик, в который заводит теорию принцип общей ковариантности, а также простоту и естественность модификации теории при отказе от этого принципа.

*Печатается по решению Ученого совета ННГУ*

ISBN 978-5-91326-172-4

© Д. Е. Бурланков, 2011  
©Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, 2011

## Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>7</b>
<b>Глава 1. ОТО не согласуется с классической физи-</b>	
<b>кой</b>	<b>15</b>
1.1. Принцип эквивалентности . . . . .	16
1.2. Кривизна пространства и уравнения Эйнштейна .	17
1.3. Две стороны теории поля . . . . .	18
1.4. Принцип общей ковариантности . . . . .	21
1.5. Без общей ковариантности . . . . .	22
1.6. Заключение . . . . .	24
<b>Глава 2. Глобальное время в общей теории относи-</b>	
<b>тельности</b>	<b>25</b>
2.1. Избранные системы координат . . . . .	25
2.2. Глобальное время . . . . .	28
2.3. Траектории тел и света . . . . .	30
2.4. Различие метрик Пэнлеве и Шварцшильда . . . .	42
2.5. Глобальное время и энергия . . . . .	46
2.6. Динамика без общей ковариантности . . . . .	50
2.7. Обсуждение . . . . .	52
2.8. Выводы . . . . .	56
<b>Глава 3. Об основах современной физики</b>	
<b>3.1. Имеются ли проблемы в понимании основ физики?</b>	<b>57</b>
3.2. Теория относительности Лоренца и Пуанкаре . . .	58
3.3. Теория относительности Эйнштейна . . . . .	60
3.4. Общая теория относительности . . . . .	65
3.5. Эфир и пространство . . . . .	72
<b>Глава 4. Расширение Вселенной и гравитация</b>	
<b>4.1. Введение . . . . .</b>	<b>75</b>
4.2. Решение . . . . .	78
4.3. Движение пробных тел . . . . .	80

4.4.	Назад по времени . . . . .	83
4.5.	Динамика гравитационного радиуса . . . . .	84
4.6.	Вращение . . . . .	87
4.7.	Заключение . . . . .	88
<b>Глава 5. Влияет ли плотность звезд на скорость расширения Вселенной?</b>		<b>90</b>
5.1.	Введение . . . . .	90
5.2.	Преобразование метрики . . . . .	91
5.3.	Множество звезд . . . . .	93
5.4.	Обсуждение . . . . .	94
<b>Глава 6. Темная энергия – энергия динамического пространства</b>		<b>96</b>
6.1.	Энергия расширяющегося мира . . . . .	96
6.2.	Глобальное время и глобальное пространство . . . . .	97
6.3.	“Темная энергия” – это несостоятельность ОТО . . . . .	99
6.4.	Динамика пространства в глобальном времени . . . . .	99
6.5.	Точные решения . . . . .	103
6.6.	Проблема . . . . .	105
<b>Глава 7. Поля скоростей в космической динамике</b>		<b>106</b>
7.1.	Введение . . . . .	106
7.2.	Движение свободной частицы . . . . .	109
7.3.	Приближение малых масштабов . . . . .	111
7.4.	Местное время . . . . .	112
7.5.	Дифференциальные уравнения полей . . . . .	113
7.6.	Сферическая система координат . . . . .	114
7.7.	Поле сопровождения . . . . .	115
7.8.	Поле Лензе–Тирринга . . . . .	120
7.9.	Движение в поле Лензе–Тирринга . . . . .	122
7.10.	Другие физические поля . . . . .	124
7.11.	Заключение . . . . .	128

<b>Глава 8. Вспышки сверхновых и вращение</b>	<b>129</b>
8.1. Введение . . . . .	129
8.2. Изозэнтропный газ в сопутствующей системе . . . . .	132
8.3. Горизонты ротаров . . . . .	134
8.4. Коллапс ротаров . . . . .	137
8.5. Пространственная метрика . . . . .	139
<b>Глава 9. Вращение релятивистской жидкости</b>	<b>142</b>
9.1. Введение . . . . .	142
9.2. Уравнения равновесия внутри звезды . . . . .	143
9.3. Граничные условия . . . . .	146
9.4. Сшивание с метрикой Керра . . . . .	149
9.5. Вариационный метод . . . . .	152
9.6. Нерелятивистский предел . . . . .	153
<b>Глава 10. Уравнение Эйлера в поле скоростей</b>	<b>155</b>
10.1. Введение . . . . .	155
10.2. Инвариантная производная по времени . . . . .	157
10.3. Ковариантное уравнение Эйлера . . . . .	158
10.4. Гидродинамика на вращающемся шаре . . . . .	160
10.5. Заключение . . . . .	164
<b>Глава 11. Метод граничных мод</b>	<b>165</b>
11.1. Введение . . . . .	165
11.2. Операторы Киллинга . . . . .	166
11.3. Операторы вращений . . . . .	169
11.4. Моды векторных полей . . . . .	170
11.5. Спинорные поля . . . . .	176
<b>Глава 12. Уравнение Дирака в гравитационном поле</b>	<b>186</b>
12.1. Введение . . . . .	186
12.2. Уравнение Дирака в метрике Пэнлеве . . . . .	187
12.3. Произвольное поле скоростей . . . . .	190
12.4. Атом водорода с учетом гравитации . . . . .	190

12.5. Заключение . . . . .	191
<b>Глава 13. О квантово-механическом описании</b>	<b>192</b>
13.1. Корпускулярно-волновой дуализм . . . . .	192
13.2. Проблема физического смысла . . . . .	199
13.3. Трактовки квантовых явлений . . . . .	202
13.4. Волны-частицы . . . . .	210
13.5. Волновая функция и динамика . . . . .	217
13.6. Волны и вероятность . . . . .	218
13.7. Заключение . . . . .	220
<b>Глава 14. Заключение. Красота теории</b>	<b>222</b>
<b>Список литературы</b>	<b>233</b>

# Предисловие

Основной порог, о который споткнулась общая теория относительности (ОТО), – квантование. Вследствие общей ковариантности гамильтониан в ОТО равен нулю – и динамика оказывается невозможной.

Что это – неадекватность описания динамики пространства-времени общей теорией относительности или же незнание нами каких-то ее глубинных особенностей, существование еще не открытых необычных методов построения квантовой теории?

Принятие второй точки зрения – раз гамильтониан равен нулю, нужно строить квантовую теорию с нулевым гамильтонианом – привело к разработке *петлевой теории гравитации*, которая, однако, не смогла придвинуться ни к каким практическим задачам, занимаясь, в основном, внутренними определениями.

Однако многие ученые уже давно пытаются исправить ситуацию, нарушив общую ковариантность, ввести все-таки неформальное, *физическое время*, как собственное время какого-либо вида материи [1, 2]. Гамильтониан в этом неформальном времени и следует привязать к квантовой теории. При этом глобальное время пространства в целом никак не противоречит наличию собственного времени у движущегося (точечного) наблюдателя (*местного времени* по Лоренцу).

Понимание, что основной проблемой в ОТО является выделение времени как физической сущности, привело к исследованию *систем отсчета* [3, 4].

Ситуация аналогична, хотя по смыслу прямо противоположна, проблеме эфира в специальной теории относительности: представление об эфире как о какой-то материальной среде тре-

бывало такого подбора его механических свойств, чтобы законы взаимодействия тел и электромагнитного поля с эфиром не зависели от скорости движения, то есть состояние покоя эфира наблюдать было невозможно. В ОТО, наоборот, пытаются выделить время, сохранив общую ковариантность.

Но не только проблемы квантовой теории требуют возврата в физику категории времени. Вся классическая физика построена на концепции развития мира во времени. Общая теория относительности претендует на то, что в каком-то пределе она переходит в классическую физику. То есть принципы ОТО (общековариантность) должны действовать и в классической физике. Однако никакой общековариантности в нашем обиходном, нерелятивистском мире мы не наблюдаем. Значит, что-то в ОТО недоработано.

Аналізу этого вопроса посвящена первая глава.

Если время выделено, выделено и пространство. В 1997–2003 годах мною была разработана *Динамическая теория пространства в глобальном времени*, короче – *теория глобального времени* (ТГВ) [5–8]. Фактически это – геометродинамика Уилера, Арновитта, Дезера и Мизнера [10, 11] в глобальном времени, то есть без всяких дополнительных условий на время и без условия равенства нулю гамильтониана.

Но в геометродинамике Уилера была серьезная трудность, состоявшая в том, что фундаментальные статические решения ОТО: метрика Шварцшильда, метрика Рейснера–Нордстрема, метрика Керра – казались непредставимыми в динамическом виде. Однако разработка математической техники *инвариантного дифференцирования по времени* (см. стр. 157), являющегося важной составляющей математического аппарата ТГВ, поставило все на свои места: оказывается, например, что метрика Шварцшильда давно была приведена к глобальному времени математиком Полем Пэнлеве [12], правда, сам Пэнлеве об этом не знал.

Теория глобального времени построена на базе несомнен-



ных достижений ОТО: пространство (трехмерное) предстает в ней как риманово пространство, с метрикой, различной в разных точках пространства и меняющейся с течением глобального времени. Инвариантная производная по времени является необходимым в ней математическим инструментом. Уравнения ТГВ – это уравнения динамики пространства в глобальном времени. При этом уравнения движения тел и динамики полей (например, электромагнитного) в одной и той же метрике в ТГВ и ОТО совпадают.

Общая теория относительности *представляет уравнения*, определяющие метрику четырехмерного пространства–времени на четырехмерном континууме, т.е. сразу всю историю – и прошлое, и будущее. В ней нет физического объекта, а лишь рецепт описания. С формальной точки зрения ОТО отличается от ТГВ дополнительным уравнением, смысл которого – равенство нулю суммарной плотности энергии всех полей и самого пространства. Поэтому, в частности, в ТГВ, где гамильтониан отличен от нуля, *нет проблемы темной энергии*, а квантовая теория естественным образом строится на ненулевом гамильтониане. При этом основная часть решений ОТО, найденных за прошедшее столетие, сохраняется (как решения ТГВ с нулевой энергией).

Поэтому *ТГВ является последовательной продолжительницей ОТО как физической теории пространства и времени*.

В главе 2 показывается, что *глобальное время естественным образом содержится в ОТО*, анализируются задачи движения тел и распространения света с точки зрения ОТО и ТГВ. Несостоятельный принцип общей ковариантности заменяется описанием процессов в глобальном времени.

Глава 3 посвящена анализу понятия относительности как в общей, так и в специальной теории относительности (СТО). В СТО пространство–время представлено пространством Минковского, в котором все инерциальные системы равноправны глобально, независимо от их размеров и интервалов по времени.

В ОТО и ТГВ инерциальные системы имеются лишь в бесконечно малом, где они связаны друг с другом преобразованиями Лоренца. Время в движущихся системах поэтому принципиально отличается от глобального времени, в котором происходит развитие Мира в целом.

В очень важной для космологии главе 4 найдено решение уравнений Эйнштейна для метрики вне сферически симметричного тяготеющего тела на фоне расширяющейся Вселенной. В ней выведено, что по мере расширения Вселенной гравитационные радиусы тяготеющих тел (звезд, например) уменьшаются. Это приводит к особенностям расширения, если смотреть назад во времени, в значительно более поздние моменты, чем момент Большого взрыва. Глава написана именно на языке ОТО, хотя изначально решение получено в ТГВ.

В пятой главе на основании точного решения для метрики одиночного тела в расширяющемся мире, найденного в предыдущей главе, получены малые добавки к метрике Эйнштейна–де Ситтера за счет множества звезд. Показано, что скорость расширения определяется не средней плотностью звездного вещества, а динамикой межзвездного пространства.

В главе 6 сравниваются проблемы расширяющейся Вселенной при описании с точек зрения ОТО и ТГВ. Показано, что проблема темной энергии в ОТО – это проблема суммарной нулевой энергии, диктуемая в этой теории принципом общей ковариантности. В ТГВ аналогичной проблемы просто нет: какая плотность энергии имеется, такая и есть. Не надо делать никаких усилий, чтобы, как в ОТО, довести ее до нуля.

Различие между метриками Шварцшильда и Пэнлеве называется *физически значимым* – под гравитационным радиусом они связаны комплексным преобразованием переменной времени. Если в метрике Шварцшильда ситуация под гравитационным радиусом просто фантастична: координаты Крускала, Финкельштейна и др. для метрики Шварцшильда описывают некоторые многолистные системы, то в метрике Пэнлеве

пространство (трехмерное) евклидово, а точечная масса, сосредоточенная в начале координат, порождает сингулярность, аналогичную сингулярности электромагнитного поля, создаваемой точечным зарядом.

В главе 7 выведены приближения слабого поля в ТГВ. К уравнениям гравитационного потенциала – основному инструменту классической астрофизики – добавлены уравнения поля скоростей в приближении слабого поля на фоне плоского пространства–времени. Из этих уравнений прямо получаются решения в виде полей Лензе–Тирринга, создаваемых вращающимися звездами и планетами. Понятие *равномерное движение относительно пространства* восстанавливает свой смысл, и описываются эффекты, с помощью которых это движение может быть обнаружено.

В главе 8 изучены стадии коллапса вращающейся звезды. Показано, что имеющиеся в литературе ограничения на скорость вращения несостоятельны. Представлен *топологический переход* при коллапсе быстро вращающейся звезды, когда она из фигуры с топологией сферы переходит в бубликообразную фигуру.

В главе 9 из уравнений Эйнштейна выводятся дифференциальные уравнение для описания внутренности вращающихся звезд. Проблема вывода таких уравнений возникла после нахождения решения Керра, описывающего метрику снаружи вращающейся звезды. Однако после построения Хартлем и Торном приближенных (линейных по угловой скорости) уравнений в 1968 году проблема вывода точных уравнений так и висела в воздухе.

Глава 10 показывает эффективность использования математической техники инвариантного дифференцирования по времени не только в задачах ТГВ, но и в решении классических задач динамики океанов и атмосферы на вращающейся Земле. Обобщение уравнения Эйлера динамики жидкости на произвольное поле скоростей позволяет решать задачи гидродинами-

ки с учетом сложного движения в пространстве, совершаемого Землей или каким-либо другим телом.

В главе 11 разработаны математические методы для работы с векторными и спинорными полями, применяемые в следующей, очень важной, 12-й главе для решения уравнения Дирака, описывающего на квантовом уровне движение свободной частицы в метрике Пэнлеве.

В главе 13 обсуждаются проблемы квантовой теории. Начальный подход к квантовой теории гравитации с точки зрения динамики пространства в глобальном времени изложен в монографиях [6, 7].

Наконец, в Заключение (глава 14) обсуждается *проблема красоты* той или иной теории. Насколько красота теории говорит о ее истинности?

Цель работы: продемонстрировать богатство описания Мира методами римановой геометрии, введенной в физику общей теорией относительности, но также показать тупик, в который заводит теорию принцип общей ковариантности.

Естественным продвижением в развитии теории пространства и времени является динамическая теория пространства в глобальном времени, не только включившая в себя большинство достижений ОТО, но и придавшая геометрической картине физический характер. Пространство с этой точки зрения также оказывается физическим объектом со своими уравнениями динамики и нетривиальной плотностью энергии.

Резюмируем основные результаты исследования:

- При анализе соответствия ОТО классической физике ранее проводилось неполное исследование.
- Принцип общей ковариантности принят в ОТО лишь для математической простоты. Он не только не следует из каких-либо наблюдений, но и противоречит классической физике, приводя к требованию равенства нулю энергии

любой системы. Это не сопрягается ни с хорошо изученной классической динамикой, ни с квантовой теорией.

- Любая (почти, за исключением некоторых экзотических) четырехмерная метрика приводима к глобальному времени.
- Метрика Шварцшильда, приведенная к глобальному времени (метрика Пэнлеве), не эквивалентна исходной, так как под гравитационным радиусом эти метрики связаны комплексным преобразованием времени.
- Пространственное сечение метрики Пэнлеве – трехмерное евклидово пространство, в том числе, и под гравитационным радиусом. Поэтому исследование геометрии в этой области с помощью метрик Крускала, Фронсдала и др. не нужно.
- Рассмотренная во второй главе динамика радиального движения в метрике Пэнлеве показывает, что в этой метрике гравитационный коллапс в ставшим традиционным понимании отсутствует.
- Постановка задач квантовой механики с неизбежностью привязана к глобальному времени. В частности, уравнение Дирака в метрике Пэнлеве определяет решение во всем пространстве, явно выделяя область под гравитационным радиусом.
- Снятие оков общей ковариантности приводит к *динамике трехмерного пространства в глобальном времени* – геометродинамике Уилера в глобальном времени.
- Пространство является физическим, динамическим объектом, обладающим определенной (знаконеопределенной) плотностью энергии.

- Учет энергии пространства в космологических задачах снимает проблему “темной энергии”.
- Космологическое расширение пространства определяет нестационарные граничные условия в задаче о геометрии вне массивного тела, что приводит к эффекту уменьшения гравитационного притяжения с течением времени.
- При рассмотрении эволюции Вселенной назад по времени интенсивно возрастают эффекты гравитационного притяжения, и особенности эволюции возникают задолго (от нас – в обратном времени) до Большого взрыва.
- Моменты вращения при расширении Мира сохраняются, так что по мере расширения роль вращения возрастает. Вместе с учетом вихревых полей это приводит к возможности объяснения аномалии скоростей во вращающихся галактиках без “темной материи”.
- Приближенное, линеаризованное описание динамики пространства представляет собой замкнутую систему.

# Глава 1

## ОТО не согласуется с классической физикой

*Принцип общей ковариантности и следующее из него равенство нулю энергии не допускает стыковки общей теории относительности с классической физикой, квантовой теорией.*

Общая теория относительности базируется на двух основных принципах:

1. Принцип эквивалентности, приведший к геометрической трактовке эффектов тяготения и давший начало многим принципиально новым следствиям, таким, как представление о расширяющейся Вселенной.
2. Принцип общей ковариантности, позволивший представить уравнения теории в предельно простой математической форме. Эта простота возникла за счет отказа от понятия “время”, роль которого в соответствии с этим принципом может играть любая функция координат и времени.

Геометрическая картина дала современной физике ряд интересных решений: метрика Шварцшильда вне сферического массивного тела с появлением нового понятия *гравитационный радиус*, поле Лензе–Тирринга, модель Фридмана расширяющегося Мира.

## 1.1. Принцип эквивалентности

Суть принципа эквивалентности составляет установленная еще Галилеем (1564–1642) независимость ускорения тел, падающих в поле тяжести, от их массы. Этот принцип проявляется в открытых Иоганном Кеплером (1571–1630) законах движения планет. В эти законы не входят массы планет:

1. Каждая планета солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причем площадь сектора орбиты, описанная радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.

Математической основой принципа эквивалентности является второй закон Ньютона и закон тяготения, где, например,  $m$  – масса планеты,  $M$  – масса Солнца,  $r$  – расстояние от планеты до Солнца, а  $k$  – гравитационная постоянная Кэвэндиша:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{\kappa M m \mathbf{r}}{r^3}.$$

Масса движущегося тела сокращается и в уравнение не входит, поэтому траектория движения от этой массы не зависит. В частности, параметры орбит планет не зависят от их масс.

В 1911 году Альберт Эйнштейн [9], изучая физические явления в свободно падающей лаборатории (лифте), обнаружил, что движение тел в свободно падающей лаборатории, ускоренно движущейся относительно Земли, происходит как в инерциальной системе, и предположил, что в этой лаборатории реализована **инерциальная система** и по отношению к другим,



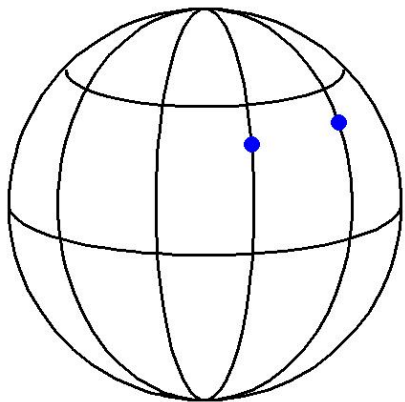
в частности, электромагнитным, явлениям. В ней отсутствует гравитационный потенциал.

В инерциальной системе свет движется прямолинейно и с постоянной частотой, но относительно неподвижного относительно Земли наблюдателя эта система движется ускоренно. Тогда относительно Земли, как вывел Эйнштейн, траектории света криволинейны, а частота изменяется с изменением гравитационного потенциала.

Инерциальными системами (малых размеров) являются космические станции, движущиеся друг относительно друга не прямолинейно и не равномерно.

## 1.2. Кривизна пространства и уравнения Эйнштейна

Иллюстрацией создания кривизны пространства видимого



движения под действием силы притяжения является картина движения двух тараканов по прямейшим линиям на сфере – меридианам. Сначала расстояние между тараканами увеличивается, затем скорость удаления уменьшается до нуля, а затем они начинают сближаться. Это эффект не действия сил, а кривизны пространства. От массы таракана он не зависит.

Идею перехода от плоского пространства–времени Минковского с метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

к искривленному четырехмерному пространству, метрика которого определяется десятью функциями координат и времени –

компонентами *метрического тензора*:

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta; \quad x^0 = c dt,$$

предложил Эйнштейну математик Марсель Гроссман (1878–1936).

Метрический тензор определяет связанный с кривизной пространства тензор Эйнштейна  $G^\alpha_\beta$ , а десять *уравнений Эйнштейна*

$$G^\alpha_\beta = \frac{8\pi k}{c^4} T^\alpha_\beta; \quad \alpha, \beta = 0..3$$

связывают его с тензором энергии-импульса материи в этом пространстве. В пустоте  $G^\alpha_\beta = 0$ .

Уравнения Эйнштейна *общековариантны*: все четыре координаты – три пространственных и временная – входят в эти уравнения равноправно, а при преобразованиях координат уравнения не меняют своего вида. Принцип общей ковариантности определяет, что в четырехмерном пространстве–времени нет выделенных направлений. В частности, время затерялось среди остальных координат.

Является ли такой подход неизбежным и согласуется ли он с наблюдениями?

### 1.3. Две стороны теории поля

Каждое физическое поле (электромагнитное, гравитационное) имеет две основные физические стороны: внешнюю и внутреннюю. Внешняя определяет, как это поле воздействует на другие физические объекты – другие поля, частицы (объект воздействия). Внутренняя – каким уравнениям подчиняется само поле, как на него влияют источники, сами объекты воздействия.

С лагранжевой точки зрения внешняя сторона определяет, как потенциалы изучаемого поля модифицируют лагранжиан

объектов воздействия. Внутренняя сторона определяет чистый лагранжиан самого изучаемого поля.

Электрическое поле приводит в движение заряженные частички, а магнитное поле отклоняет потоки заряженных частиц и проводники с токами – оба этих закона объединены в выражении силы Лоренца. Однако эти явления еще не дают возможности определить уравнения поля, на основании которых находятся электромагнитные напряженности. Это могут быть как линейные уравнения Максвелла, так и нелинейные уравнения Борна–Инфельда. Экспериментальное измерение силы Лоренца в электрическом и магнитном полях не дает ответа, подчиняются ли эти поля электродинамике Максвелла или Борна–Инфельда.

Главный физический тезис общей теории относительности Эйнштейна – гравитация определяется метрикой искривленного пространства–времени. Свободные частицы движутся по геодезическим линиям. В электродинамике (и теориях других полей) частные производные заменяются на ковариантные, определяемые метрикой. Частицы и поля обладают локальной лоренц-инвариантностью. При этом уравнения, определяющие конфигурацию поля, далеко неоднозначны. Вспомним, что первый существенный результат ОТО (вращение перигелия Меркурия) был получен Эйнштейном из считающихся математически неверными, несамосогласованными (для общего случая) уравнений [14], однако это никак не сказалось на результате.

Точно так же и расчет отклонения света в первоначальных и окончательных уравнениях Эйнштейна одинаков. Обе эти системы уравнений имеют решение Шварцшильда как вакуумное решение в сферически симметричном случае, поэтому большинство так называемых *проверок ОТО* (проверяющих на самом деле метрику Шварцшильда, даже ее линеаризацию на фоне метрики Минковского) можно считать проверкой не только окончательных, но и первоначальных, считающихся неверными, уравнений Эйнштейна.

Но, говорят, тут включается в работу математика. В уравнениях Эйнштейна вариация действия материи по компонентам метрического тензора (как показал Гильберт [15]) приводит в правой части уравнений (источники) к тензору энергии-импульса, ковариантная четырехмерная дивергенция которого равна нулю, значит, и в левой части (уравнения свободного поля) должен стоять тензор с нулевой дивергенцией. Так ли это на самом деле?

В той же работе Гильберт показал, что общековариантные уравнения обладают избыточностью, в них содержатся *тождества Гильберта*. Например, при нахождении решения Шварцшильда возникают три нетривиальные компоненты тензора Эйнштейна, налагающие три дифференциальных уравнения на две искомые функции от радиуса, определяющие метрику. Однако при нахождении этих функций из двух простейших дифференциальных уравнений (первого порядка) третье уравнение (второго порядка) удовлетворяется автоматически.

Такая же ситуация и с моделью Фридмана, приводящей к двум дифференциальным уравнениям для одной искомой функции, после нахождения которой из уравнения Эйнштейна с индексами (0,0) – дифференциального уравнения первого порядка – остальные уравнения (второго порядка) удовлетворяются автоматически.

Поэтому уравнения Эйнштейна в их первом, считающемся ошибочным, варианте вполне допустимы, *если они выполняются не для всех компонент*, например:

$$R_{ij} = \text{const} \cdot T_{ij}, \quad (ij) \neq (00). \quad (1.1)$$

Здесь уравнений девять, а не десять, как у Эйнштейна, поэтому никакого противоречия дивергенций нет. Назовем такую теорию с девятью уравнениями *теорией А*. Она оказывается экспериментально проверенной и математически согласованной.

## 1.4. Принцип общей ковариантности

“Но уравнения (1.1) ужасны! – воскликнет образованный теоретик. – Они нарушают общую ковариантность! В них явно выделено время – индекс 0!”

А разве при сравнении расчетного угла поворота орбиты Меркурия с наблюдаемым проверялся принцип общей ковариантности? Разве замеренный экспедицией Эддингтона угол отклонения света Солнцем хоть как-то связан с общей ковариантностью?

Принцип общей ковариантности был путеводной ниточкой Эйнштейна, приведшей его хоть к какому-то замкнутому варианту создаваемой им сложной теории, подающей надежды, что-то объясняющей в наблюдениях, которую надо было испытывать и испытывать, даже не столько экспериментально, сколько методологически, сравнением с классической физикой, в которую в какой-то области параметров ОТО обязана переходить, как, например, при скоростях, много меньших скорости света, динамика специальной теории относительности переходит в классическую динамику.

К сожалению, судьба общей теории относительности оказалась иной. Вместо *физической теории* она стала *элитарной теорией*. Она прошла проверку на внешнюю сторону, и это поспешно было объявлено как предельный переход к классической физике. Коротенькую заметку о результатах экспедиции Эддингтона по измерению отклонения света Эйнштейн назвал “Доказательство общей теории относительности” [16]. После такого триумфа разительная несогласованность ее внутренней структуры с классической физикой просто игнорировалась.

Эта *разительная несогласованность* очевидна: в классической физике нет общей ковариантности, которая должна бы в ней быть, если бы она являлась каким-то пределом ОТО.

Наиболее серьезно несогласованность проявляется в проблеме энергии. В любой общековариантной теории (ОТО, теория

струн) допустимость произвольного преобразования времени без изменения действия приводит к нулевой энергии. И не только энергии в целом, интегрально, но и плотности энергии в любой точке и в любой момент времени. Это явление подробно описано в монографии Мизнера, Торна и Уилера [11, т. 2, с. 129, формула (21.12)].

При этом время может быть выбрано как угодно. Выберем его в какой-либо задаче совпадающим при слабых полях с временем аналогичной классической задачи. Тогда выход в эту задачу из ОТО приводит и к классической энергии, равной нулю.

Рассмотрим, например, самогравитирующую жидкую каплю (звезду). В классической физике ее гравитационная энергия отрицательна. Если эту каплю разделить на две, которые затем разнести на большое расстояние, энергия увеличится. Для выполнения описанного процесса *нужно совершить работу*. В общей теории относительности как у исходной капли, так и у ее разнесенных потомков энергия равна нулю, причем с учетом громадной величины  $tc^2$ , и для разделения не требуется совершения какой-либо работы.

## 1.5. Без общей ковариантности

Именно равенство нулю гамильтониана в ОТО приводит к невозможности согласовать ее с квантовой теорией, где гамильтониан является основным рабочим инструментом. Если смотреть на ОТО как на вариант *физической теории*, то этот факт также требует пересмотра ее основ (отказа от общей ковариантности). При *элитарном* подходе к теории нужно изопрятаться дальше, строя как-то квантовую теорию с нулевым гамильтонианом (например, петлевую гравитацию).

При отказе от общей ковариантности гамильтониан оказывается ненулевым и квантовая теория гравитации начинает делать первые шаги с ненулевым гамильтонианом Арновитта–Дезера–Мизнера (см. [11, т. 2]), равенства нулю которого тре-

бует  $(0,0)$  уравнение Эйнштейна.

В космологии исчезает проблема “темной энергии”, так как эта проблема возникла из жесткой связи постоянной Хаббла, определяемой скоростью расширения Мира, с плотностью материи, что является прямым следствием требования нулевой плотности суммарной энергии (энергия пространства в этой модели отрицательна – см. [7]).

Проливается свет и на специальную теорию относительности. Вне зависимости от уравнений, определяющих геометрию пространства–времени, динамика частиц, локальных полей (например, электромагнитного) обладает локальной лоренц-инвариантностью, и все локальные наблюдения и эксперименты только с локальными объектами никакого глобального времени почувствовать не могут. Только когда физика связывается с *динамикой пространства* – распределенным объектом, – проявляется абсолютное время. Например, даже сейчас, при узаконенном принципе общей ковариантности космологические задачи изначально формулируются в глобальном времени.

При восстановлении понятия *абсолютное время* восстанавливается и *абсолютное пространство*. Возникает (восстанавливается) понятие *абсолютного движения* – относительно пространства. При этом у каждого движущегося наблюдателя свое собственное (“местное”) время, связанное с глобальным временем преобразованиями Лоренца. Эти преобразования определяют ход событий в окрестности движущегося наблюдателя. Его собственное время и ближайшая окрестность пространства образуют “относительное время” и “относительное пространство” в формулировке Ньютона, однако связь их с абсолютным временем и абсолютным пространством несколько сложнее, чем полагал Ньютон.

Мир, ставший в теории относительности набором движущихся наблюдателей, каждый со своим временем, восстанавливается независимым от наблюдателей (которые его могут лишь слегка деформировать) и развивающимся в целом в глобальном

времени.

## 1.6. Заключение

Общая теория относительности не прошла полную начальную проверку на соответствие классической физике. Ее принцип общей ковариантности и следующее из него равенство нулю энергии не допускает стыковки ОТО с классической физикой, квантовой теорией. Поэтому требуется дальнейшая настройка теории, основанной на псевдоримановой геометрии пространства и времени и опирающейся на глобальное время. Это может быть *теория А* с уравнениями (1.1), это может быть динамика пространства в глобальном времени, изложенная в [7], или какая-то новая теория, но работа в направлении поиска адекватной теории пространства и времени, согласуемой с классической физикой, должна продолжаться.



## Глава 2

# Глобальное время в общей теории относительности

Итак, принцип общей ковариантности несовместим с теорией, переходящей в классическую физику. Что же может сохранить достижения ОТО, связанные с принципом эквивалентности и его геометрической реализацией? Решения ОТО могут быть приведены к глобальному времени. На примере рассмотрения движения тел и света в окрестности массивного тела показано, что определяющие траектории значения энергии и момента количества движения полностью согласованы с их релятивистским пределом и выражение для энергии генерируется сдвигом в глобальном времени.

### 2.1. Избранные системы координат

Декартова система координат в евклидовом пространстве является *избранной*. Ее избранность состоит в том, что в ней как бы отсутствует метрический тензор: во всех точках пространства он представляется единичной матрицей, поэтому, например, ковариантные и контравариантные компоненты тензоров совпадают. Именно поэтому до середины XIX века люди, живя и работая в евклидовом пространстве, даже не подозревали о существовании метрического тензора. Работая, например, в сферической системе координат, проводили аккуратный пересчет в эту систему длин и производных по координатам, считая декартову систему исходной, *естественной*.

Аналогична ситуация с временем в классической физике. Наиболее уверенно свойства времени описал Леонардо да Винчи [17, с. 82]:

“Время совпадает только с первыми началами геометрии, т. е. с точкой и линией: точка во времени должна быть приравнена к мгновению, а линия имеет сходство с длительностью известного количества времени. И подобно тому, как точки – начало и конец линии, так мгновения – граница и начало каждого промежутка времени.”

Ньютону пришлось строго определять объективное время при описании объективных законов движения: производная от скорости по какому времени пропорциональна силе.

Большую путаницу в понятие времени внес Эрнст Мах. Вместо обсуждения времени, в котором протекают физические процессы, в частности, определяемые тем же вторым законом Ньютона, он ведет речь лишь об *измерении времени* [18]:

“Движение может быть равномерным относительно другого движения. Вопрос, равномерно ли движение само по себе, не имеет никакого смысла. В такой же мере мы не можем говорить об “абсолютном времени” (независимо от всякого измерения). Это абсолютное время не может быть измерено никаким движением и поэтому не имеет никакого ни практического, ни научного значения, никто не вправе сказать, что он что-нибудь о таком времени знает, это праздное “метафизическое” понятие.”

Действительно, математика давно научилась использовать замену переменных. Описание процессов в произвольно выбираемом времени – это тензорный анализ в одномерном пространстве. Пусть, например,  $t$  – *ньютонovo время*. Преобразуем пе-

ременную времени  $t = f(\tau)$  и будем  $\tau$  принимать за “новое время” (время Маха). Назовем такое произвольное преобразование времени *преобразованием Маха*. Связь описаний динамических процессов в *ньютонОВОМ времени* и “новом времени” определяется связью длительности, о которой писал Леонардо, в одном и другом времени:

$$dt = \left( \frac{dt}{d\tau} \right) d\tau.$$

Время метризуется:

$$dt^2 = \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 d\tau^2 = g_{\tau\tau} d\tau^2; \quad g_{\tau\tau} = \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2.$$

Далее в одномерном римановом пространстве вводится связность

$$\Gamma_{\tau\tau}^{\tau} = \frac{g^{\tau\tau}}{2} \frac{dg_{\tau\tau}}{d\tau} = \frac{d^2t}{d\tau^2} / \frac{dt}{d\tau}.$$

По отношению ко времени скорость является ковариантным вектором и ковариантная производная скорости по времени пропорциональна производной по ньютонОВОМ времени:

$$\nabla_{\tau} v = \frac{dv}{d\tau} - \Gamma_{\tau\tau}^{\tau} v = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{v}{\frac{dt}{d\tau}} \right) = g_{\tau\tau} \frac{d}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \right). \quad (2.1)$$

При записи второго закона Ньютона нужно не забывать добавку со связностью. В ньютонОВОМ, “объективном” времени нет никаких добавок. Они исчезают, как связности в декартовой системе координат евклидоваго пространства.

Можно, например, следуя совету Маха, время измерять углом сдвига Земли по ее эллиптической орбите вокруг Солнца, положив  $d\varphi = \omega d\tau$ ;  $\omega = \text{const}$ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{r(t)^2}; \quad dt = \frac{r(t)^2}{L} \omega d\tau.$$

Далее можно вычислить связность и при записи закона движения не забыть про нее. Тогда в новом времени будет естественно равномерное изменение угла по новому времени  $\tau$ .

Так как одномерное пространство не обладает кривизной, при любом  $g_{\tau\tau}(\tau)$  можно найти *истинное*, равномерно текущее время  $dt = \sqrt{g_{\tau\tau}(\tau)} d\tau$ , определяющее динамику физических процессов. При движении планеты вокруг Солнца есть *объективно* равномерный процесс: постоянна секториальная скорость (второй закон Кеплера).

## 2.2. Глобальное время

Эйнштейн поначалу полагал, что теория не может быть общековариантной. В большой статье 1914 года [19] он обосновывает это в специальном параграфе. Однако это интуитивное положение он описывает как *ограничение на выбор координат*, в частности, полагая необходимым условие равенства (-1) детерминанта четырехмерной метрики  $g$ . Но при таком ограничении даже в метрике Минковского оказывается недопустимой сферическая система координат с  $g = -r^4 \sin^2 \vartheta$ .

Особое внимание ограничению системы координат уделяет В.А. Фок [20]. Пытаясь найти аналог декартовым координатам в ОТО, он провозглашает приоритет *гармонических координат*. Однако никаких физических следствий использование гармонических координат не влечет. Например, метрика Шварцшильда переводится в гармонические координаты заменой радиуса  $r_S$  на радиус Фока  $r_S = r_F + k M/c^2$ . Общековариантность ОТО позволяет эквивалентно описывать явления как в одних, так и в других координатах.

Понимание, что основной проблемой в ОТО является выделение времени как физической сущности, а не просто ограниченный на используемую систему координат, привело к исследованию *систем отсчета* [3, 4]. В этих работах главным объектом оказывается переменная времени, в частности, в приложении к

реализации формализма Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ – см. стр. 48) [10], то есть фактически ведется поиск *глобального времени*. Однако еще требуется это время выделить *физически*, отделить от множества произвольных функций, которые по идеологии ОТО могут представлять время, то есть нарушить общую ковариантность.

В работе 1911 года [9] Эйнштейн предположил, что в свободно падающем лифте реализуется инерциальная система. Исследуем динамику такого лифта в произвольном гравитационном поле с метрическим тензором  $g_{\alpha\beta}(x^\mu)$  и обратным метрическим тензором  $g^{\alpha\beta}(x^\mu)$ . Будем описывать свободное движение частицы с массой  $m$  уравнением Гамильтона–Якоби для действия  $S(x^\mu)$ :

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = m^2 c^2; \quad g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} = 1.$$

Последнее уравнение получено из первого заменой переменной  $S = m c \tau$ . Уравнение Гамильтона–Якоби определяет функцию  $\tau(x^\mu)$ , в принципе, во всем пространстве. Более того, так как это дифференциальное уравнение в частных производных, оно допускает множество решений, имеющих, как правило, каустические особенности. При этом оно описывает свободное падение не одной лаборатории, а целого континуума.

Если, однако, имеется такое решение без особенностей, то выбрав переменную  $\tau$  за временную переменную, мы приведем компоненту метрического тензора  $g^{00}$  к значению единица во всем пространстве. По законам преобразования тензора

$$\bar{g}^{00} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial x^\beta} = 1. \quad (2.2)$$

Переменную  $\tau$  естественно назвать *глобальным временем*. Характерным условием в глобальном времени является  $g^{00} = 1$ .

Не задаваясь пока вопросом о единственности и каустиках, констатируем: в любой метрике, по крайней мере, в конечной

области пространства–времени **можно перейти к глобальному времени.**

Для того, чтобы понять связь глобального времени с временем классической механики, рассмотрим хорошо изученные в ОТО процессы движения частиц и света в окрестности сферически симметричного тела массы  $M$ .

### 2.3. Траектории тел и света

Описание всех возможных траекторий (геодезических в метрике Шварцшильда) было проведено еще в 1931 году в фундаментальной работе Хаджихара [21]. Очень подробное описание траекторий выполнено в [11, 22]. Мы рассмотрим этот вопрос с целью уяснения смысла параметров траекторий – энергии и момента импульса.

При описании различных физических явлений вблизи массивного тела метрика Шварцшильда обычно рассматривается как единственная – с точностью до преобразования пространственных координат. В одной из самых первых фундаментальных монографий по ОТО – “Математической общей теории относительности” Эддингтона [23] вопросу единственности посвящено специальное исследование: это решение “...при наблюдении некоторых условий является единственным”:

1. Галилеев характер метрики на бесконечности;
2. Равенство нулю  $g_{41}$ ,  $g_{42}$ ,  $g_{43}$ ;
3. Независимость  $g_{\mu\nu}$  от  $t$ ;
4. Шаровая симметрия части  $ds^2$ , относящейся к пространству.

Условия 1, 3 и 4 являются физическими, однако условие 2 – психологическое: математики и физики всегда предпочитали

работать с ортогональной системой координат – проще. Легко показать, что в общем случае четырехмерная метрика не может быть приведена к диагональному виду. Действительно, метрический тензор имеет 10 компонент, но имеется произвол выбора четырех функций преобразования координат, с помощью которых можно обратить в нуль четыре компоненты метрики, так что неуничтожимыми остаются шесть компонент, в то время как диагональная метрика представляется четырьмя компонентами. Поэтому требование диагональности метрики в общем случае невыполнимо, несовместно с уравнениями Эйнштейна и может рассматриваться лишь как временное удобство, возможное лишь в задачах с соответствующей симметрией. Например, никакими преобразованиями нельзя глобально уничтожить недиагональные компоненты в метрике Керра, описывающей геометрию пространства–времени снаружи вращающейся массы.

### 2.3.1. Движение в метрике Шварцшильда

В метрике Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\kappa M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2\kappa M}{c^2 r}\right)} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.3)$$

движение происходит по экваториальной поверхности симметрии, поэтому, выбрав сферические координаты, можно считать, что оно происходит при неизменном значении угла  $\vartheta = \pi/2$  с равным нулю значением компоненты импульса  $p_\vartheta$ .

Общая методика описания движения опирается на связь импульсов с массой движущегося тела – уравнение Гамильтона–Якоби для действия  $S$ :

$$\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = P_\alpha; \quad g^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta = m^2 c^2; \quad g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 1, \quad (2.4)$$

где введены относительные импульсы:  $P_\alpha = m c p_\alpha$ .

После обозначения  $p_\varphi \equiv l$  уравнение Гамильтона–Якоби принимает вид:

$$\frac{p_0^2}{U} - U p_r^2 - \frac{l^2}{r^2} = 1; \quad U \equiv 1 - \frac{2\mu}{r}. \quad (2.5)$$

Величина  $\mu = \kappa M/c^2$  имеет размерность длины, а  $r_g = 2\mu$  называют гравитационным радиусом. Из уравнений Гамильтона следует постоянство  $p_0 = E/mc = \text{const}$  (закон сохранения энергии) и  $l = p_\varphi = \text{const}$ . Выразив теперь из (2.5) импульс  $p_r$

$$p_r = \pm \frac{\sqrt{p_0^2 - U(1 + l^2/r^2)}}{U}, \quad (2.6)$$

находим зависимость  $\varphi$  от  $r$ , определяющую траекторию движения (принцип Мопертюа):

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\partial p_r}{\partial l} = \mp \frac{-l/r^2}{\sqrt{p_0^2 - (1 - 2\mu/r)(1 + l^2/r^2)}}. \quad (2.7)$$

Этот вид уравнения может быть упрощен заменой радиальной переменной и соответствующей константы момента:

$$x = \mu/r; \quad a = \mu/l; \quad b = \mu p_0/l. \quad (2.8)$$

После такой замены зависимость угла  $\varphi$  от переменной  $x$ , связанной с радиусом, определяется дифференциальным уравнением:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{b^2 - (1 - 2x)(a^2 + x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{2x^3 - x^2 + 2a^2x + (b^2 - a^2)}}. \quad (2.9)$$

В знаменателе стоит кубический полином, который можно представить как произведение одночленов с корнями  $x_1, x_2, x_3$ :

$$2x^3 - x^2 + 2a^2x + (b^2 - a^2) = 2(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$



$$= 2x^3 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x + 2(x_1x_2x_3).$$

Сравнивая коэффициенты этого многочлена при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях, находим:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1/2;$$

$$a^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \quad b^2 - a^2 = 2x_1x_2x_3.$$

Третий корень выражается с помощью теоремы Виета через первые два:  $x_3 = 1/2 - x_1 - x_2$ . Через них же теперь выражаются  $a$  и  $b$ , а следовательно,  $p_0$  и  $l$ . Но корни  $(x_1, x_2)$  — это точки максимального ( $r_1$ ) и минимального ( $r_2$ ) радиусов:  $x_1 = \mu/r_1$ ;  $x_2 = \mu/r_2$ . Именно их удобнее задавать в качестве параметров орбит. Через них выражаются момент и энергия (напомним,  $2\mu = r_g$  — гравитационный радиус):

$$l^2 = \frac{r_g r_1^2 r_2^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) - r_g (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}; \quad (2.10)$$

$$p_0^2 = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 - r_g)(r_2 - r_g)}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) - r_g (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}. \quad (2.11)$$

Из выражения (2.9) можно извлечь, например, знаменитое вращение перигелия Меркурия. Параметры  $x_1$  и  $x_2$  для орбит планет Солнечной системы — очень малые величины. При этом в процессе движения  $x_1 \leq x \leq x_2 \leq x_3$ . Положим  $x_1 = x_0 - h$ ;  $x_2 = x_0 + h$ . Тогда при  $h \rightarrow 0$ , так как  $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ , значение  $x = x_0 + \xi \approx x_0$ . В этом приближении  $q = 1 - 2(x + x_1 + x_2) \approx 1 - 6x_0 = \text{const}$  и интеграл берется аналитически:

$$q d\varphi = \frac{d\xi}{\sqrt{h^2 - \xi^2}}; \quad q\varphi = \arcsin \frac{\xi}{h}; \quad (2.12)$$

$$x = x_0 + h \sin(q\varphi).$$

Колесание между  $x_1$  и  $x_2$  совершается за период по углу

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{q} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 3\frac{r_g}{r_0}}} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{3\kappa M(r_1 + r_2)}{2c^2 r_1 r_2} \right). \quad (2.13)$$

Отсюда определяется знаменитый поворот перигелия Меркурия на 43 угловые секунды в столетие.

Это выражение для изменения угловой переменной оказывается верным и при достаточно малых радиусах (не очень малых  $x_0$  – существенно релятивистское движение) – лишь бы малой была разность  $h = (x_2 - x_1)/2$ .

Изучим и более общие решения. Корни подкоренного выражения (2.9) расположим в порядке  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Так как подкоренное выражение должно быть положительно, если оно имеет вид

$$f(x) = 2(x - x_1)(x_2 - x)(x_3 - x), \quad (2.14)$$

то совершается колебание  $x_1 \leq x \leq x_2$ , то есть между двумя меньшими корнями. При стремлении  $x_1 \rightarrow x_2$  орбита переходит в устойчивую круговую. Если же  $x_3$  стремится к  $x_2$  ( $x_3 = x_2 + h$ ;  $h \rightarrow 0$ ), то  $x_2$  также определяет круговую орбиту, однако малейшее уменьшение  $x < x_2$  приводит к колебаниям между  $x_1$  и  $x_2$  – неустойчивая круговая орбита. Условие устойчивости круговой орбиты  $x_3 > x_2$ .

Так как  $x_1 + x_2 + x_3 = 1/2$ , то предельной устойчивой круговой орбитой является орбита с  $x_1 = x_2 = x_3 = 1/6$ , то есть  $R_{min} = 6\mu$ . Круговые орбиты с радиусом  $3\mu < R < 6\mu$  неустойчивы.

На круговых орбитах ( $r_1 = r_2 = R$ ) общие выражения (2.10)-(2.11) определяют момент количества движения и энергию:

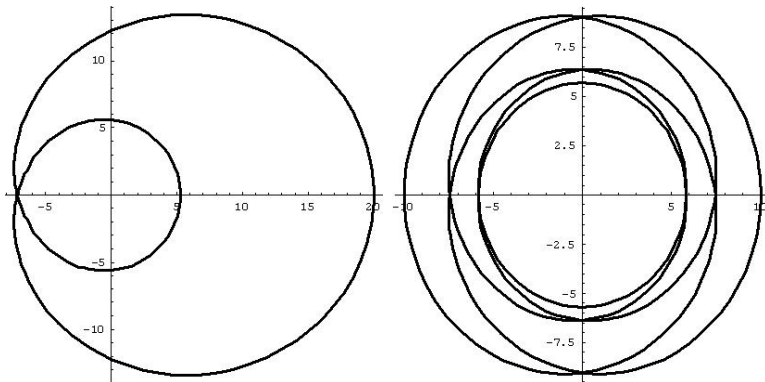
$$l^2 = \frac{\mu R^2}{R - 3\mu}; \quad e = \frac{(R - 2\mu)}{\sqrt{R(R - 3\mu)}}. \quad (2.15)$$

Энергия минимальна на предельной устойчивой орбите  $R = 6\mu$ , на которой она равна  $\sqrt{8/9} m c^2$ . В знаменателе подкоренного выражения (2.15) стоит множитель  $(R - 3\mu)$ , определяющий, что при  $R < 3\mu$  круговых орбит не существует. При уменьшении радиуса к значению  $3\mu$  относительная энергия  $e = E/(m c^2)$  стремится к бесконечности. При конечных энергиях она достижима лишь при  $m = 0$  – для светового луча.

Общие финитные траектории имеют вид вращающегося эллипса и в общем случае незамкнутые. При малых значениях максимального и минимального радиусов угол вращения значительно увеличивается. Например, при орбите, близкой к круговой, применимо выражение (2.13):

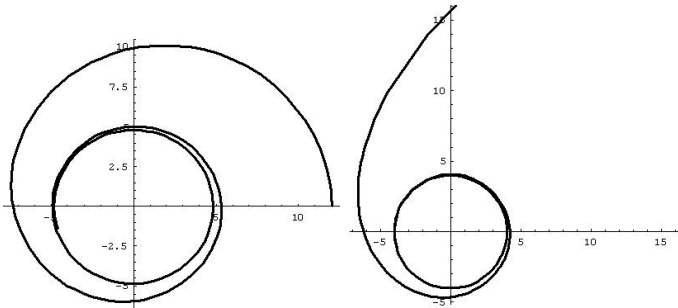
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 6\kappa M/(Rc^2)}}.$$

То есть угол поворота может быть любой величиной от  $2\pi$  до бесконечности. Среди этих траекторий есть и замкнутые, вот, например:



На осях указаны относительные расстояния от центра.

А вот примеры граничных траекторий:



Условие того, что траектория является граничной, такое же, как и для неустойчивой окружности:  $x_3 = x_2$ ;  $x_1 + 2x_2 = 1/2$ . Отсюда

$$x_2 = \frac{1 - 2x_1}{4}; \quad r_2 = \frac{4\mu r_1}{r_1 - 2\mu}. \quad (2.16)$$

В частности, для частицы, приходящей из бесконечности ( $r_1 = \infty$ ) радиус предельной круговой орбиты равен  $r_2 = 4\mu$ .

### 2.3.2. Метрика Пэнлеве

Отказавшись от условия ортогональности метрики, в 1921 году Пэнлеве [12] показал, что существует бесконечно много статических сферически симметричных решений уравнений Эйнштейна с заданной массой, получающихся преобразованием в метрике Шварцшильда временной переменной  $t \rightarrow t_S$ :



$$dt_S = dt + w(r) dr. \quad (2.17)$$

*Французский математик Поль Пэнлеве (1863–1933), один из создателей аналитической теории дифференциальных уравнений, политик (во время Первой мировой войны военный министр и даже премьер-министр Франции), авиатор (10 октября 1908 г. поднялся с Вильбуром Райтом в качестве пассажира в первом официальном полете с пассажиром).*

Многообразие сферически симметричных статических решений определяется многообразием функций  $w(r)$ . Назовем это преобразование времени *поясным*, так как оно аналогично определению поясного времени на Земном шаре: в какой-то момент времени в поясах различной долготы установлено различное *поясное время* (например, когда в Москве 12 часов дня, в Лондоне еще только 10 утра, а в Вашингтоне 4 часа ночи). Но с точки зрения классической физики для наблюдателя, покоящегося в любом поясе, приращение времени одинаково (глобальный сдвиг времени).

Многообразие преобразований Пэнлеве порождает многообразие статических сферически симметричных метрик, все компоненты тензора Эйнштейна которых равны нулю, содержащих произвольную функцию  $V(r)$ :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2kM}{rc^2} & V(r) & 0 & 0 \\ V(r) & -\frac{1-V^2(r)}{1-2kM/(rc^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

При любой функции  $V(r)$  такая метрика описывает вакуумное пространство–время вне тяготеющей массы  $M$ . С точки зрения ОТО все такие метрики равноправно описывают пространство–время вне тяготеющей массы.

В частности, внимание Пэнлеве привлекла одна метрика с  $V(r) = \sqrt{2kM/(rc^2)}$ , для которой  $g_{rr} = 1$  – далее мы будем называть ее *метрикой Пэнлеве*:

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + 2\sqrt{\frac{r_g}{r}} c dt dr - dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (2.19)$$

где  $r_g = 2\kappa M/c^2$  – гравитационный радиус. Пространственное сечение  $t = \text{const}$  имеет метрику трехмерного евклидова пространства в сферических координатах, в то время как в решении Шварцшильда (2.3) пространство (сечение  $t = \text{const}$ ) не

только сильно искривлено, но под *гравитационным радиусом*  $r_g$  вообще теряет свою локально евклидову структуру. Пространственный элемент метрики Шварцшильда

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - 2\kappa M/(rc^2)} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

определяет тензор Риччи с не равными нулю компонентами

$$R_1^1 = -\frac{2\kappa M}{r^3 c^2}; \quad R_2^2 = R_3^3 = \frac{\kappa M}{r^3 c^2},$$

в то время как для плоского пространственного элемента метрики Пэнлеве все компоненты тензора Риччи равны нулю.

В метрике Пэнлеве не равны нулю следующие компоненты обратного метрического тензора:

$$g^{00} = 1; \quad g^{0r} = g^{r0} = V; \quad g^{rr} = V^2 - 1; \quad V = \sqrt{\frac{rg}{r}}, \quad (2.20)$$

а  $g^{\vartheta\vartheta}$ ,  $g^{\varphi\varphi}$  совпадают с соответствующими компонентами в метрике Шварцшильда. Пэнлеве привел метрику Шварцшильда к глобальному времени и евклидову пространственному сечению.

Уравнение Гамильтона–Якоби (при  $\vartheta = \pi/2$ ,  $p_\vartheta = 0$ ), в котором радиальный импульс в отличие от шварцшильдова обозначим  $\bar{p}_r$ , выглядит так ( $p_0 = -e$ ):

$$(-e + V \bar{p}_r)^2 - \bar{p}_r^2 - \frac{l^2}{r^2} = 1. \quad (2.21)$$

Выразим из него импульс  $\bar{p}_r$ :

$$\bar{p}_r = \frac{-V e \pm \sqrt{e^2 - (1 - V^2)(1 + l^2/r^2)}}{1 - V^2} = p_r - w e; \quad w = \frac{V}{1 - V^2}, \quad (2.22)$$

так как  $1 - V^2 = U$ , а  $p_r$  – это выражение радиального импульса (2.6). Функция  $w$  в этом выражении – это функция из (2.17), связывающая метрику Пэнлеве с метрикой Шварцшильда.

Определяющее траекторию дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\partial \bar{p}_r}{\partial l} = -\frac{\partial p_r}{\partial l}$$

в точности совпадает с дифференциальным уравнением для метрики Шварцшильда, так как добавка к выражению для импульса не зависит от углового момента  $l$  в случае метрики Пэнлеве.

Этот результат вполне согласуется с математической техникой ОТО: при преобразовании времени в соответствии с выражением (2.17) ковариантный вектор импульса получает добавку (переменные с надчерком – в метрике Шварцшильда, без надчерка – в метрике Пэнлеве):

$$\bar{p}_r = p_r + p_0 \frac{\partial t_S}{\partial r} = p_r + w(r) p_0. \quad (2.23)$$

Так как преобразуется только временная переменная, это преобразование на уравнение траектории не влияет.

Хотя уравнения траекторий в метриках Шварцшильда и Пэнлеве совпадают, в метрике Пэнлеве это траектории в трехмерном евклидовом пространстве, а в метрике Шварцшильда пространственное сечение не плоское.

### 2.3.3. Световые лучи

Уравнение Гамильтона–Якоби для световых лучей (уравнение эйконала) однородно по действию:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = k_\alpha; \quad g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0. \quad (2.24)$$

В метрике Шварцшильда

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t} = c k_0; \quad k_0^2/U - U k_r^2 - \frac{k_\varphi^2}{r^2} = 0. \quad (2.25)$$

Если мы интересуемся траекторией световых лучей, а не разверткой их во времени, то, как и при движении частиц, нужно выразить радиальное волновое число

$$k_r = \frac{\sqrt{k_0^2 - U k_\varphi^2 / r^2}}{U},$$

и его производная по  $k_\varphi$  определит производную угла по радиусу:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\partial k_r}{\partial k_\varphi} = \pm \frac{k_\varphi / r^2}{\sqrt{k_0^2 - U k_\varphi^2 / r^2}}. \quad (2.26)$$

Как и для массивного тела, заменим переменную  $r$  на обратную:

$$x = \frac{k M}{r c^2} \equiv \frac{\mu}{r}; \quad dx = -\frac{\mu}{r^2} dr; \quad \frac{k_0}{k_\varphi} = b.$$

Тогда уравнение траектории представится в виде:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{b^2 - (1 - 2x)x^2}}. \quad (2.27)$$

В отличие от уравнения (2.9) здесь всего один параметр  $b^2$  и, следовательно, всего один параметр  $r_0$  – наименьшее приближение луча к массивному телу – определяет корень  $x_0 = \mu/r_0$ , при котором кубический многочлен обращается в нуль:

$$b^2 = (1 - 2x_0)x_0^2. \quad (2.28)$$

Подстановка этого выражения для  $b^2$  в (2.27) приводит к выражению

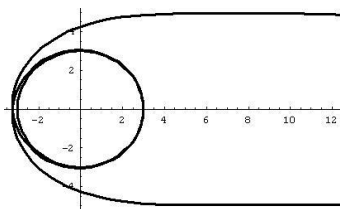
$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(x_0 - x)(x + x_0 - 2x^2 - 2xx_0 - 2x_0^2)}}. \quad (2.29)$$



Например, для Солнца  $x_0 = 2.12 \times 10^{-6}$ , а  $0 < x \leq x_0$ , и подкоренное выражение можно разложить в ряд:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2 \int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \left( 1 + \frac{x^2 + x x_0 + x_0^2}{x + x_0} \right) dx = \pi + 4x_0 = \\ &= \pi + \frac{4\kappa M}{R c^2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Достаточно хорошо совпадающее с этим выражением значение угла отклонения света, проходящего вблизи Солнца, в 1919 году во время полного солнечного затмения замерила экспедиция Эддингтона. Для движения по окружности, как мы видели, два корня должны совпадать.



Если выражение (2.28) продифференцировать по  $x_0$ , результат обратится в нуль при  $x_0 = 1/3$ . При таком значении  $x_0$  в кубическом многочлене знаменателя в выражении (2.29) два корня совпадают, а третий корень отрицателен:

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{3}; \quad x_3 = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Так как  $x_3 < x_2$ , эта круговая орбита ( $R = 3\mu$ ) неустойчива.

Точно так же не меняется траектория светового луча при *полюсном* преобразовании (2.17). Поэтому угловое отклонение луча света Солнцем не зависит от того, выбирается ли метрика Шварцшильда или Пэнлеве.

### 2.3.4. Гравитационное красное смещение

В уравнении Гамильтона–Якоби (2.25) частота света является константой на траектории вследствие стационарности метрики.

Фотон проявляет себя во взаимодействии, например, с атомами. Нужно вести речь не об энергии фотона, а о его энергии в локальном пространстве–времени того или иного тела (наблюдателя). На наблюдателя действует частота света  $\Omega$  в его собственном времени  $\bar{t}$  (см., например, [25]):

$$\Omega = \frac{d\psi}{d\bar{t}} = c u^\alpha \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} = c u^\alpha k_\alpha. \quad (2.31)$$

Для наблюдателя, покоящегося в гравитационном поле в точке с потенциалом  $\phi$ , где  $g_{00} = 1 + 2\phi/c^2$ , отлична от нуля только компонента четырехмерной скорости  $u^0$ , вычисляемая из условия нормировки  $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$ ;  $g_{00} (u^0)^2 = 1$ ;  $u^0 = 1/\sqrt{g_{00}}$ , так что выражение (2.31) приводит к наблюдаемой частоте

$$\Omega = c u^0 k_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + 2\phi/c^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + 2\kappa M/(c^2 r)}}. \quad (2.32)$$

Именно такой сдвиг частоты замерили Паунд и Реббка.

Частота света, измеряемая покоящимся наблюдателем, определяется только компонентой четырехмерной метрики  $g_{00}$ , которая при поясном преобразовании времени не меняется.

## 2.4. Различие метрик Пэнлеве и Шварцшильда

До некоторых пор *поясное* преобразование не влияет на физическую картину. Однако при уходе тела под горизонт представляются картины, физически различные в разных метриках.

В метрике Пэнлеве масса входит под корнем, следовательно, равноправны два знака в решении. В главе 4 будет показано, что вследствие глобального расширения Вселенной поле скоростей Пэнлеве есть лишь приближение от учитывающего расширение выражения (4.11), приводящего к плотности энергии (4.12), в которой знаку плюс соответствует всюду положительная плотность, а при знаке минус вблизи центра плотность

отрицательна. Это физическая проблема, требующая своего исследования, поэтому в дальнейшем мы будем брать поле скоростей как Пэнлеве – со знаком плюс.

Чтобы не загромождать изложение формулами, рассмотрим лишь радиальное движение частиц, имеющих на бесконечности нулевую кинетическую энергию (полная энергия  $E = m c^2$ ). Уравнение Гамильтона–Якоби (приведенное к единичной массе,  $e = E/m c^2$ ,  $p = P/m c$ )

$$(e - V p)^2 - p^2 = 1; \quad e = \sqrt{1 + p^2} + p V \quad (2.33)$$

определяет дифференциальное уравнение движения ( $\tau = ct$ ):

$$u = \frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial e}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} + V. \quad (2.34)$$

Выражение для  $p$  находится из закона сохранения энергии  $e = 1$ :

$$(1 - V^2) p^2 + 2 V p = 0,$$

определяющего два значения радиального импульса:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = \frac{-2 V}{1 - V^2}.$$

Первый корень дает простое выражение для скорости частицы, движущейся от центра:

$$u = \frac{dr}{d\tau} = V = \sqrt{\frac{r_g}{r}}; \quad r = \left( \frac{9}{4} r_g t^2 \right)^{1/3}. \quad (2.35)$$

Они свободно проходят наружу через гравитационный радиус.

Второй корень подстановкой в (2.34) определяет дифференциальное уравнение

$$u = \frac{dr}{d\tau} = V \frac{V^2 - 1}{V^2 + 1} = -\sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{r - r_g}{r + r_g}. \quad (2.36)$$

На больших расстояниях ( $r > r_g$ ) частицы движутся к центру (к гравитационному радиусу). Под гравитационным радиусом частицы движутся наружу – также к гравитационному радиусу.

В метрике Пэнлеве описывается движение частиц в соответствующем этой метрике евклидовом пространстве.

Интегрированием находим время ( $t = \tau/c$ ) достижения определенного значения радиуса:

$$\tau = \tau_0 - \frac{2r^{3/2}}{3\sqrt{r_g}} - 4\sqrt{r r_g} + 2r_g \ln \frac{r + r_g}{r - r_g}.$$

И под гравитационным радиусом, и над ним частицы движутся к гравитационному радиусу, но никогда его не достигают.

Это важное заключение: *никакого провала свободных частиц под гравитационный радиус в метрике Пэнлеве не происходит.* Этот вывод требует пересмотра ставшей уже традиционной концепции гравитационного коллапса.

Предыдущие вычисления мы проводили в глобальном времени. Рассмотрим теперь радиальное движение в собственном времени движущихся частиц  $\bar{t} = \bar{\tau}/c$ . Приращение собственного времени определяется приращением интервала:

$$\begin{aligned} d\bar{\tau}^2 &= (1 - V^2) d\tau^2 + 2V d\tau dr - dr^2 = \\ &= d\tau^2 (1 - V^2 + 2Vu - u^2) = d\tau^2 (1 - (u - V)^2). \end{aligned} \quad (2.37)$$

В первом случае (2.35)  $u = V$  и  $d\bar{\tau} = d\tau$  – частица, двигаясь в метрике Пэнлеве, покоится относительно пространства и ее собственное время совпадает с глобальным.

Во втором случае (2.36)

$$u - V = V \left( \frac{V^2 - 1}{V^2 + 1} - 1 \right) = \frac{-2V}{1 + V^2}; \quad 1 - (u - V)^2 = \frac{(1 - V^2)^2}{(1 + V^2)^2}$$

и собственное время выражается через глобальное следующим образом:

$$d\bar{t} = dt \frac{1 - V^2}{1 + V^2} = dt \frac{r - r_g}{r + r_g}. \quad (2.38)$$

Уравнение движения (2.36) в собственном времени оказывается очень простым:

$$\frac{dr}{d\bar{\tau}} = -V = -\sqrt{\frac{r_g}{r}},$$

интегрируя которое, находим время уменьшения радиуса от  $r$  до  $r_1$ :

$$\bar{t} = \frac{2}{3c\sqrt{r_g}} (r^{3/2} - r_1^{3/2}).$$

В частности, гравитационный радиус из любой точки достигается за конечное собственное время, однако, в отличие от картины ОТО, в дальнейшем частица остается на гравитационном радиусе, так как под ним радиус возрастает.

Метрика Шварцшильда связана с метрикой Пэнлеве преобразованием дифференциала времени

$$dt_S = dt + \frac{\sqrt{r_g r}}{c(r - r_g)} dr,$$

которое после интегрирования определяет связь времени Шварцшильда ( $t_S$ ) с глобальным временем Пэнлеве:

$$ct_S = ct + 2\sqrt{r_g r} + r_g \ln \frac{r - r_g}{r + r_g}. \quad (2.39)$$

Под гравитационным радиусом время Шварцшильда становится комплексным. Именно с этим связана сложная структура пространства–времени под гравитационным радиусом, описываемая диаграммами Крускала и другими специфическими координатами при анализе шварцшильдовой особенности (см. [11]).

В Теории глобального времени, как и в геометродинамике Уилера [11], пространственное сечение  $t = \text{const}$  всегда имеет риманову (локально евклидову) структуру.

## 2.5. Глобальное время и энергия

При рассмотрении динамики вне массивного тела мы пользовались вполне определенными понятиями энергии, момента количества движения, при уменьшении гравитационного потенциала плавно переходящими в соответствующие величины классической физики. В частности, инвариантность относительно сдвига по времени как в метрике Шварцшильда, так и в метрике Пэнлеве приводила к сохраняющейся величине – энергии, величина которой одинакова во всех системах, связанных поясным преобразованием времени.

Вектор однородного сдвига по времени  $\tilde{t} = t + dt$  на величину, одинаковую во всех точках пространства, при поясном преобразовании не меняется, а в метрике Пэнлеве это однородный сдвиг глобального времени.

Поэтому в круге задач, даже не только статических (например, космологических), понятие энергии можно связывать именно со *сдвигом в глобальном времени*, не меняющим соотношения  $g^{00} = 1$ . Он совпадает с генератором энергии в классической механике. Никакого “произвольного преобразования времени”, приводящего к нулевой энергии, в этих задачах не требуется.

Так как существует описанный выше алгоритм (2.2) приведения к глобальному времени, то оно, таким образом, является не выдумкой в дополнение или в противовес к ОТО, но естественно в ОТО содержится. В рассмотренных задачах сильно релятивистского движения с вензелями и петлями энергия, момент импульса так же хорошо определены, как и в задачах классической механики.

### 2.5.1. Энергия в классической механике

Классическая теории гравитации в своей основе опирается на введенный Лапласом гравитационный потенциал, определя-

емый из дифференциального уравнения Пуассона

$$\Delta\phi = 4\pi\kappa\rho \quad (2.40)$$

( $\rho$  – плотность вещества) с граничным условием равенства нулю на бесконечности.

Энергия самогравитирующей системы по аналогии с электростатикой складывается из отрицательной энергии самого поля и потенциальной энергии тела:

$$W = \int \left( -\frac{(\nabla\phi)^2}{8\kappa\pi} + \rho\phi \right) dV. \quad (2.41)$$

Для однородной капли массой  $M$  полная энергия во внутренних и внешних областях отрицательна:

$$W_0 = W_e + W_i = -\frac{9\kappa M^2}{5R}. \quad (2.42)$$

Если жидкую каплю разделить на две, разнесенные на большое расстояние, то гравитационный радиус каждой капли, пропорциональный ее массе, уменьшится в два раза, а внешний радиус – в  $\sqrt[3]{2}$  раз. Так как суммарная масса капель не изменится, то общая отрицательная энергия капель в своих гравитационных полях по модулю составит  $2^{-2/3} = 0.63$  от энергии (2.42). То есть для такого разделения капель нужно совершить работу

$$A = -\frac{9\kappa M^2}{5R} (0.63 - 1) = 0.67 \frac{\kappa M^2}{R}. \quad (2.43)$$

Что же предсказывает общая теория относительности?

### 2.5.2. Энергия в формализме АДМ

Одним из важнейших этапов в описании динамики пространства–времени в ОТО явилась серия работ Арновитта, Дезера и Мизнера 1959 года (формализм АДМ) [10], где в явном виде

выделена переменная времени и показано, что динамическими переменными в ОТО являются компоненты трехмерной метрики.

Они представили десять компонент четырехмерного метрического тензора через шесть компонент метрического тензора  $\gamma_{ij}$ , трехмерный вектор  $V^i$  и функцию хода времени  $N(t, x, y, z)$ :

$$g_{00} = N^2 - \gamma_{ij} V^i V^j; \quad g_{0i} = \gamma_{ij} V^j; \quad g_{ij} = -\gamma_{ij}. \quad (2.44)$$

Компоненты обратного метрического тензора

$$g^{00} = \frac{1}{N^2}; \quad g^{0i} = \frac{V^i}{N^2}; \quad g^{ij} = \frac{V^i V^j}{N^2} - \gamma^{ij}. \quad (2.45)$$

Десять уравнений Эйнштейна получаются как уравнения Эйлера при вариации полного действия (гравитационного действия Гильберта и действия вещества) по всем десяти компонентам метрического тензора или десяти компонентам разбиения АДМ.

Разбиение АДМ (3+1) можно проводить в любых координатах при любом выборе переменной времени. Проведем это разбиение после приведения к глобальному времени:

$$g^{00} = 1; \quad N(t, x, y, z) = 1; \quad g^{0i} = V^i; \quad g^{ij} = V^i V^j - \gamma^{ij}. \quad (2.46)$$

Однако в соответствии с теоремой Гильберта вариация действия по  $N$  и есть суммарная (гравитация плюс вещество) плотность энергии. Но принцип общей ковариантности ОТО требует, чтобы и эта вариация равнялась нулю, – априори выставляется требование равенства нулю плотности суммарной энергии в любой точке и в любой момент времени.

В этом пункте предельный переход от ОТО к классической механике **не верен**. Вариация в собственном времени параметра хода времени  $N$  недопустима, она приводит к расхождению ОТО с классической механикой. Чтобы этого расхождения не было, теория, строящаяся на четырехмерной геометрии пространства–времени **не должна быть общековариантной**.



### 2.5.3. Жидкая капля в ОТО

Рассмотрим с точки зрения ОТО энергию самогравитирующей жидкой капли, исследованную выше с классической точки зрения.

Статическая сферически симметричная метрика приводится к виду:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{2\mu(r)} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.47)$$

Здесь две функции радиуса, которые должны быть найдены из уравнений Эйнштейна:  $\nu(r)$ , переходящая в гравитационный потенциал  $\phi$  классической физики

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{2\phi}{c^2},$$

и  $\mu(r)$ , определяющая деформацию пространства, оказывающегося плоским при  $\mu(r) = 0$ .

Сначала попробуем провести приближение, в котором имеется только гравитационный потенциал, оставив пространство плоским:

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Компонента  $G_0^0$ , определяющая энергию гравитации, для этой метрики оказывается равной нулю. Ожидаемого приближения к классическому уравнению Пуассона для гравитационного потенциала  $\Delta\phi = 4\pi\kappa\rho$  не возникает. Деформация пространства в уравнениях Эйнштейна оказывается необходимым элементом.

Для полной метрики (2.47) плотность энергии гравитации  $w = -G_0^0$  выражается только через функцию деформации пространства  $\mu(r)$ :

$$w = -G_0^0 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{d}{dr} (r e^{-2\mu(r)}) - 1 \right), \quad (2.48)$$

а энергия гравитации в сферическом объеме радиуса  $R$  определяется интегралом:

$$W_g = \frac{c^4}{4k} \int_0^R e^{\nu+\mu} \left( \frac{d}{dr} (r e^{-2\mu(r)}) - 1 \right) dr. \quad (2.49)$$

Вариация этого функционала по  $\nu(r)$  и приводит к “десятому” уравнению Эйнштейна

$$\frac{d}{dr} (r e^{-2\mu(r)}) - 1 = \epsilon r^2, \quad (2.50)$$

(где  $\epsilon \approx \rho c^2$  – плотность энергии вещества), из которого следует равенство нулю полной энергии внутри тела:

$$E = \frac{c^4}{16\pi k} \int_0^R w \sqrt{g} dr d\vartheta d\varphi + \int_0^R \epsilon \sqrt{g} dr d\vartheta d\varphi = 0. \quad (2.51)$$

Переход к классической механике должен бы совершаться при малых массах, при стремлении  $\mu$  к нулю, однако очевидно, что разложение (2.50) в ряд по  $\mu$  дает нуль в любом приближении.

Таким образом, решение задачи о равновесии самогравитирующей жидкой капли в ОТО не переходит в соответствующую задачу классической механики. *ОТО в ее современном виде не имеет правильного перехода к классике.*

Например, в рассмотренной выше задаче классической механики о разрезании капли пополам мы вычислили необходимую для этого работу. В ОТО и исходная капля, и разнесенные на большое расстояние ее части имеют нулевую энергию, поэтому необходимая для разделения работа равна нулю.

## 2.6. Динамика без общей ковариантности

Образцом использования глобального времени является космология. Например, наиболее популярная в космологии метри-

ка Эйнштейна–де Ситтера имеет компоненту  $g^{00} = 1$ , то есть время в ней – глобальное. От глобального времени зависит масштаб пространства, четко отделенного от времени,  $m(t)$ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - m^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.52)$$

Из десяти уравнений Эйнштейна вследствие высокой симметрии нетривиальными остаются два: вариация зависимости радиуса от времени приводит к динамическому уравнению

$$2 \frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{m}^2}{m^2} = -\frac{8 \pi \kappa}{c^4} p. \quad (2.53)$$

Вариация множителя перед  $dt^2$  приводит к “десятому уравнению Эйнштейна”

$$\left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 = \frac{8 \pi \kappa}{3 c^4} \epsilon. \quad (2.54)$$

Уравнение (2.53) – дифференциальное уравнение второго порядка, динамическое. Его первый интеграл с учетом термодинамического соотношения, связывающего плотность энергии  $\epsilon$  и давление  $p$  при изменении объема  $d\epsilon = -(\epsilon + p) dV$ , допускает произвольную константу интегрирования  $E$ :

$$\frac{4}{3} \pi m^3 \epsilon - \frac{c^2}{2 \kappa} m \dot{m}^2 = E. \quad (2.55)$$

Одно это уравнение обеспечивает динамику масштаба Мира, правда, с произвольной константой  $E$ , определяемой из начальных условий: если принять масштаб Мира в данный момент равным единице, то  $\dot{m} = H$  – постоянная Хаббла, а  $\epsilon$  – замеренная к настоящему времени средняя плотность энергии вещества во Вселенной.

Однако уравнение (2.54) требует, чтобы эта константа равнялась нулю, то есть, чтобы

$$\frac{\epsilon}{c^2} = \frac{3}{8 \pi \kappa} H^2 \equiv \rho_c. \quad (2.56)$$

Величина  $\rho_c$  называется *критической плотностью*.

Однако по тщательным замерам астрофизиков XX века средняя плотность вещества во Вселенной составляет лишь около четырех процентов от критической – уравнение (2.56) не выполняется в 25 раз! И здесь вариация по масштабу времени приводит к резкому расхождению с наблюдениями. Выход в ОТО найден только через название дисбаланса этого уравнения “темной энергией”.

Лишь без общей ковариантности космологические решения перестают противоречить наблюдениям.

## 2.7. Обсуждение

В 1914 году Эйнштейну наконец удалось установить общую физическую схему нащупываемой теории гравитации: источником кривизны, описываемой тензором Риччи, является тензор энергии–импульса материи  $R_{\alpha\beta} = \text{const } T_{\alpha\beta}$ . Проведенный на основе этих уравнений расчет траектории Меркурия без всяких дополнительных гипотез объяснил обнаруженный Леверье поворот его эллиптической траектории. Казалось, что теория уже создана и работает.

Однако в 1915 году Д. Гильберт показал математическую некорректность этих уравнений и, дав Эйнштейну время на исправление математической ошибки, представил изящный вариационный вывод математически корректных уравнений [15]. Теория с необычной физической идеей оказалась полностью корректной со стороны математики.

Но физики еще не привыкли к основному закону, хорошо известному программистам: “*Последняя найденная ошибка на самом деле является предпоследней.*” И общая теория относительности после наблюдения в 1919 году отклонения световых лучей Солнцем (вторая проверка) была объявлена непогрешимой как с физической, так и с математической точки зрения.

Конечно, такое поспешное возведение теории в ранг непо-

грешимых вызывало протест многих физиков, однако для серьезной критики нужно было серьезно с этой теорией поработать, но в исключительно богатой на открытия первой четверти (и даже половины) XX века большинство ученых занималось развитием совершенно других направлений. А некомпетентные “разоблачения” ОТО только укрепляли ее авторитет “самой выдающейся теории”.

Немногие физики решались заявлять публично о своих сомнениях. Например, в известной книге Л. Бриллюэна [26] мы читаем: “Общая теория относительности – пример великолепной математической теории, построенной на песке.”

Но в книге Бриллюэна более примечательно предисловие, написанное крупнейшим советским специалистом в ОТО А.З. Петровым, где он высказывает серьезную озабоченность положением ОТО как раздела физики:

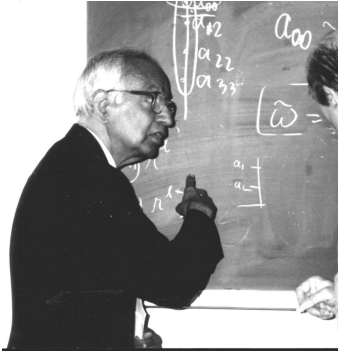
“Что же касается общей теории относительности, то вопреки довольно распространенному мнению могучее сооружение этой теории покоится на столь шатком экспериментальном фундаменте, что ее можно было бы назвать колоссом на глиняных ногах.

... не существует опытных измерений основных величин теории, например, энергии поля тяготения.

... общая теория относительности до сих пор щеголяет в коротких штанишках “вундеркинда”, которому все позволено и даже – освобождение от экспериментальной проверки. Для истинного физика такое положение нетерпимо.

Среди рассматриваемых Бриллюэном вопросов заслуживают особого внимания следующие: теория относительности и потенциальная энергия...”

Но интересны замечания и других крупных специалистов в ОТО.



*Субрахманьян Чандрасекар (1910–1995). В 1931 г. показал наличие предела массы белых карликов. В 1983 г. издал монографию “Математическая теория черных дыр”. Лауреат Нобелевской премии 1983 г.*

Вклад в общую теорию относительности Субрахманьяна Чандрасекара огромен.

Однако и он обеспокоен слабой экспериментальной базой теории. В лекции “Эстетические основы общей теории относительности”, посвященной Шварцшильду [27], он пишет не о доверии, а о *вере* в эту теорию:

“Во время последних двадцати лет большие усилия были направлены на сверение низших порядков приближения и Ньютоновой теории, как это предсказывала Общая теория относительности. Эти усилия увенчались успехом, и предсказания теории, относящиеся к изменению течения времени в точках с различной гравитацией, к отклонению световых лучей, ожидаемому при пересечении гравитационного поля и следующему отсюда замедлению времени, к прецессии Кеплеровских орбит и, наконец, к замедлению периода обращения двойных звезд на эксцентрических орбитах, вследствие гравитационного излучения, все было подтверждено в пределах погрешностей наблюдения и измерения.

Но все эти явления по отношению к следствиям из Нютоновской составляли несколько частей к миллиону, не более 3–4 параметров в пост-ньютоновском развитии сравнений поля Эйнштейна. И, таким образом, предсказание общей теории относительности

в пределах сильного гравитационного поля не получило никакого подтверждения...

Почему же тогда мы верим этой теории? ... наше доверие следует из *красоты математического описания природы, которое дает теория.*"

Классическая механика заслужила *доверие* ученых и инженеров после работ Ньютона, Эйлера, Лапласа, показав свою эффективность в самых разных приложениях. В отношении к ОТО Чандрасекар говорит лишь о вере.

В конце 70-х годов В.Н. Фоломешкин подверг критике тезис о равенстве нулю энергии в ОТО, как противоречащий классическому понятию энергии. Если есть некоторое выражение для плотности гравитационной энергии (определяемой в те времена псевдотензором), содержащее некоторый малый параметр, то если полное выражение равно нулю, оно равно нулю и в любом порядке разложения по этому малому параметру. Могут ли гравитационные волны в ОТО уносить энергию, если энергия источника всегда равна нулю? Его поддержал А.А. Логунов [28].

Одной из серьезных попыток внести математическую корректность в определение энергии в ОТО явилась статья Л.Д. Фаддеева в УФН "Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна" [30]. В ней использовался дираковский формализм гамильтоновой динамики со связями для описания с точки зрения ОТО системы, асимптотически плоской на бесконечности. Плотность гравитационной энергии фактически также определялась псевдотензорами, но автор показал, что при преобразованиях координат, не затрагивающих координаты на бесконечности, величина интеграла энергии не меняется.

В статье не приводилось каких-либо предельных переходов к классическим задачам – то есть ответа на вопрос Фоломешкина не было. Висящим в воздухе остался и вопрос, что делать в случае динамической асимптотики (например, расширяющейся

Вселенной) или для замкнутого Мира.

Битва разгорелась, когда взамен ОТО Логунов предложил *релятивистскую теорию гравитации* [29]. Дискуссия велась не по сути проблемы энергии, а против какой-то там новой теории. Была ли при этом действительно исследована проблема энергии? Нет. Просто каждый лагерь высокомерно перестал слушать противоположный.

Высокомерность со стороны защитников ОТО, к сожалению, определялась наивной уверенностью в непогрешимости ОТО, царящей в релятивистских научных кругах и тщательно поддерживаемой. Теория так красива!

## 2.8. Выводы

- Общая теория относительности содержит глобальное время.
- Сдвиг в глобальном времени является генератором выражения энергии как в классической механике, так и в сходных задачах ОТО.
- Следующее из принципа общей ковариантности требование равенства нулю суммарной плотности энергии противоречит классической физике.
- Следующая отсюда необходимость отказа от вариации компоненты  $g^{00}$  выделяет глобальное время физически.



## Глава 3

# Об основах современной физики

К сожалению, в настоящее время широко публикуется всякая макулатура, содержащая отрицание основ современной физики (особенно достается теории относительности и квантовой теории). Разумеется, такую литературу УФН не будет пропагандировать.

*Обращение редакционной коллегии УФН (т. 169, №1, 1999 г.)*

### 3.1. Имеются ли проблемы в понимании основ физики?

Нужно ли солидному научному журналу заявлять, что в нем не будет приниматься к печати *всякая макулатура*, например, о влиянии мысленных усилий экспериментатора на траекторию летающей тарелки? Очевидно, что в приведенном эпиграфе редакционная коллегия журнала “Успехи физических наук” (УФН) отмежевывается не вообще от статей макулатурного содержания и исполнения (что и так должно быть очевидно), а

заявляет, что статьи, содержащие отрицание основ современной физики (особенно теории относительности и квантовой теории), априори являются “макулатурными”.

При этом отмечается, что (видимо, в других журналах) такие статьи “широко публикуются”. Значит, проблема “основ современной физики” все-таки есть. Вот на основания геометрии никто не покушается, и статьи с критикой евклидовой геометрии “широко не публикуются”. Правда, почти два века назад критике подверглись и основания геометрии: кто-то выдумал, что возможна геометрия, где через данную точку к заданной прямой можно провести не одну параллельную прямую. Сейчас с этим разобрались: выяснилось, что этот “кто-то” – Николай Иванович Лобачевский, но, как известно, – он гений – и потому ему разрешено затрагивать основы. Является ли современная физика более обоснованной, чем евклидова геометрия?

А если бы УФН существовал в 1899 году и отмежевался бы от потока “всякой макулатуры, содержащей отрицание основ современной физики” (статьи Пуанкаре, Лоренца, Лармора, а через год и совсем дикая статья Планка; я уж не говорю о дальнейшем потоке) – как бы мы оценили это заявление сейчас?

В данной главе мы рассмотрим проблемы, связанные с пространством и временем и, с неизбежностью, – с теорией относительности. Начнем сначала со специальной теории относительности. Неприятие многими учеными специальной теории относительности как в XX веке, так и в текущем во многом связано со сплетением под этим названием различных теорий.

### **3.2. Теория относительности Лоренца и Пуанкаре**

В популярной литературе рассказывается, что Лоренц так и не принял теорию относительности Эйнштейна, заявляя, что сторонники старых воззрений не принимают новых, а просто вымирают. Пуанкаре в докладе 1911 года о теории относитель-

ности даже не упоминает Эйнштейна. Выдающийся математик первой половины XX века Э. Уиттекер, активно работавший в тот бурный период развития физики, в научно-историческом исследовании “История теорий эфира и электричества” [31] называет соответствующую главу “Теория относительности Пуанкаре и Лоренца”. В ней он описывает значительный вклад Эйнштейна, но в заголовок его имя не выносит.

В чем же дело? История теории относительности изложена во множестве работ, поэтому мы дадим лишь краткий экскурс в эту историю, выделяя принципиальные моменты.

В 1895 году Лоренц и Фицджеральд, пытаясь понять отрицательные результаты эксперимента Майкельсона по определению абсолютного движения Земли при вращении вокруг Солнца (со скоростью  $30 \text{ км/с} = 1/10000$  скорости света), ввели предположение о сжатии размеров всех тел в направлении движения. Анри Пуанкаре в 1900 году высказал мысль общего характера: законы природы устроены так, что абсолютного движения обнаружить невозможно: например, в механике законы движения во всех инерциально движущихся системах одинаковы – видимо, и электродинамика должна быть устроена так же.

Идея ясна: уравнения динамики Ньютона (второй закон) одинаковы во всех инерциальных системах. Нужно таким же образом модифицировать и электродинамику движущихся сред. Лармор в монографии “Эфир и материя” 1895 г., Лоренц в ряде статей стремились отыскать такие преобразования компонент электромагнитного поля и пространственных координат, а также – важный момент! – времени в движущейся системе, чтобы уравнения электромагнитного поля Максвелла как в движущейся, так и в неподвижной системах были одинаковы. Окончательные преобразования были найдены Лоренцом в работе 1904 года, которую сразу оценил Пуанкаре, показав, что найденные Лоренцом преобразования координат и времени образуют группу. Лармор, Лоренц, Пуанкаре рассматривали исходным движение относительно абсолютного пространства Ньютона, который

наряду с абсолютным ввел и относительные пространства движущихся наблюдателей.

В механике Ньютона время в системах движущихся наблюдателей совпадало с временем в абсолютно неподвижной системе – абсолютным временем. Лоренц показал, что время в системе движущегося наблюдателя идет в другом темпе, чем абсолютное время, и дал ему название “местного времени”.

Таким образом, и Пуанкаре, и Лоренц полагали вслед за Ньютоном, что весь Мир находится в абсолютном пространстве (с которым они связывали “эфир”) и его развитие происходит в абсолютном времени. Однако у движущихся наблюдателей “относительное пространство” и “относительное время” устроены немного более сложно, чем это полагалось во времена Ньютона, до развития электродинамики и римановой геометрии.

### **3.3. Теория относительности Эйнштейна**

В знаменитых работах 1905–1907 г.г. [32, 33] Эйнштейн разработал два существенных положения. Во-первых, он осознал, что если во всех движущихся системах уравнения Максвелла одинаковы, то и следующая из этих уравнений скорость распространения электромагнитных возмущений и, в частности, скорость света должна быть одинакова. Необходимая для этого модификация формулы сложения скоростей может быть обеспечена введенным еще Лармором и Лоренцом преобразованием времени при переходе от одной инерциальной системы к другой. Эйнштейн, исходя из этой идеи, продемонстрировал вывод преобразований Лоренца, оказавшийся несравненно более простым, чем из требования инвариантности уравнений Максвелла.

Во-вторых, им был выдвинут совершенно новый взгляд на принцип относительности, существенно отличающийся от принципа относительности Пуанкаре. Если Пуанкаре движение рассматривал по отношению к “эфиру” – абсолютной неподвижной

системе, то Эйнштейн провозгласил принцип исключения абсолютной системы:

“Следовало лишь понять, что введенную Г.А. Лоренцом вспомогательную величину, названную им *местным временем*, на самом деле следует определить как *время*”.

Абсолютная система была изгнана из физики. Вот как это описывает Макс Лауэ [34, с. 87]:

“Лорентц, например, установил различие *expressis verbis* между собственным временем, непосредственно применяющимся в привилегированной системе отсчета, и “местным временем”, которое вычисляется из абсолютного времени и пространственных координат для других систем отсчета. Решающий поворот, отказ от “как будто бы”, совершил в 1905 г. А. Эйнштейн. На основе глубокого воззрения на сущность пространства и времени он высказал мнение о *полном* равноправии всех [инерциальных] систем отсчета.”

Эйнштейн [33]:

“*Законы природы не зависят от состояния движения системы отсчета, по крайней мере, если она не ускорена.*”

Таким образом, теория относительности Лоренца и Пуанкаре исходит из наличия глобальной инерциальной системы – пространства и времени Мира в целом, а теория относительности Эйнштейна отрицает такую систему, “как не наблюдаемую” ни механическими опытами, ни электродинамическими. В теории Эйнштейна Мир состоит из бесконечного множества инерциальных систем, связанных с различно движущимися наблюдателями или телами, элементарными частицами.

Лауэ, правда, отмечает, что одна избранная система не противоречит теории относительности [34, с. 82]:

“Если дается единственная инерциальная система, то можно принять ее за абсолютную систему отсчета и движение относительно нее – за абсолютное движение. Но так как этого не бывает, то говорят о принципе относительности.”

Именно эту, “крайне релятивистскую точку зрения” Эйнштейна не приняли не только Лоренц и Пуанкаре, но и многие известные и неизвестные ученые. Если в некоторой теории проявляется симметрия, то выход в более широкую теорию может привести к выделению определенного элемента этой системы.

Следует обратить внимание, что в специальной теории относительности рассматриваются лишь локальные теории – динамика материальных точек и электродинамика. Механические и электродинамические процессы локальны и поэтому релятивистски инвариантны; при описании этих явлений все инерциальные системы равноправны. Но гравитация нелокальна, она приводит к римановой геометрии, где преобразования Лоренца применимы лишь в бесконечно малом, а в целом выделяется *глобальное время*. В искривленном пространстве (как на ухабистой дороге) состояния покоя и движения по инерции существенно отличаются. Локальная лоренц-инвариантность электродинамики совершенно не означает лоренц-инвариантности гравитации.

Отрицание теории относительности Эйнштейна – это не явление, например, о том, что энергия и импульс частицы массы  $m$  могут зависеть от скорости только в виде

$$E = \frac{m v^2}{2}; \quad \mathbf{p} = m \mathbf{v}, \quad (3.1)$$

а выражения

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.2)$$

по каким-то глубоким философским убеждениям недопустимы.

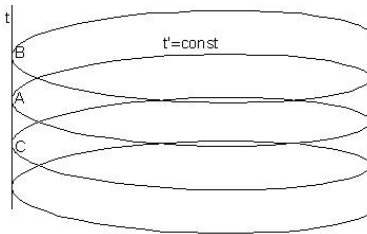
Возражения возникают тогда, когда стоит вопрос о развитии нашего Мира в целом в глобальном времени.

В работе [33] Эйнштейн пишет, что именно его трактовка принципа относительности позволяет “сразу предвидеть отрицательный результат эксперимента Майкельсона–Морли”. Действительно, есть инерциальная система, связанная с Солнцем, в которой свет распространяется со скоростью  $c$ , и есть другая инерциальная система, связанная с Землей, движущейся относительно Солнца со скоростью 30 км/с. Обе системы равноправны, и нам незачем делать какие-либо пересчеты, связанные с распространением света в системе Солнца: в системе Земли свет в любом направлении распространяется с той же скоростью  $c$ , поэтому никакой эксперимент анизотропию распространения света обнаружить не может. Будем считать Землю неподвижной системой – и никакого ее движения не обнаружим.

Все очень логично, но Земля, как известно, *вращается* вокруг Солнца. Конечно, это никак не сказывается на результатах эксперимента Майкельсона–Морли, так как за 5–10 минут проведения эксперимента траектория Земли испытывает поворот максимум на угол  $360 / (6 \cdot 24 \cdot 365) = 0.0068$  градуса или приблизительно на 25 угловых секунд. Поэтому вопрос стоит не о корректировке результатов эксперимента Майкельсона–Морли, а звучит так: действительно ли система отсчета, связанная с Землей, вращающейся вокруг Солнца, равноправна с системой отсчета, связанной с Солнцем?

### 3.3.1. Вращающаяся система

События во вращающейся системе можно отобразить на цилиндре с метрикой Минковского – цилиндре Минковского.



Три точки А, В, С, имеющие одну и ту же пространственную координату, имеют одинаковое время во вращающейся системе, а в неподвижной разнесены во времени.

При вращении с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  линейная скорость на окружности радиуса  $R$  равна  $V = \Omega R$ , и преобразование Лоренца, в частности, для времени

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \text{const},$$

где  $x$  – путь вдоль круговой траектории, определяет мировую линию постоянного времени  $t'$  вращающейся точки:

$$t = \frac{Vx}{c^2}.$$

При обходе полной окружности  $x$  увеличивается на величину  $2\pi R$  и набегают время

$$\Delta t = \frac{2\pi R^2}{c^2} \Omega. \quad (3.3)$$

Это расстояние по оси времени между точками (С,А) и (А,В), а между В и С эта разность вдвое больше.

Если из точки А выпустить два сигнала – по направлению вращения (в направлении В) и против вращения (в направлении С), то при возврате в точку испускания сигнал, идущий по направлению вращения, должен идти меньшее время, чем идущий против вращения, на эту разность времени – удвоенную



величину (3.3). Если сигналы периодические с частотой  $\omega$ , то у них окажется разность фаз:

$$\Delta\psi = 2\omega \Delta t = \frac{4\pi R^2}{c^2} \Omega\omega. \quad (3.4)$$

Величина сдвига фаз не зависит от скорости распространения сигнала во вращающейся системе, где она должна быть одинакова по и против направления вращения (свет, звук во вращающемся кольце). Это явление – эффект Саньяка – хорошо изучено и используется, например, в оптических гироскопах (см., например, [35]). На самом деле сдвиг определяется не  $\Delta t$ , а  $\Delta t'$ , но разница между  $t$  и  $t'$  определяет высшие порядки.

Из рисунка сразу видно, что координаты вращающегося наблюдателя существенно отличаются от координат неподвижного. Однако на малых по сравнению с длиной окружности расстояниях они вполне эквивалентны. Поэтому в общем случае для произвольно движущихся тел преобразования Лоренца, принцип относительности применимы только в бесконечно малом, как и в общей теории относительности, к рассмотрению которой мы и переходим.

### 3.4. **Общая теория относительности**

Судьба общей теории относительности (ОТО) оказалась вырванной из логического контекста развития физики начала XX века. В работе 1907 года [33] Эйнштейн нащупывает связь ускорения с гравитационным полем, а в исключительно глубокой работе 1911 года [9] связывает понятие инерциальных систем с телами, свободно падающими в гравитационном поле (так называемый “принцип эквивалентности”). Его совместная работа с Марселем Гроссманом приводит к переходу от плоского пространства Минковского к искривленному пространству–времени. Применив в 1915 году слегка недоработанную теорию для описания вращения орбиты Меркурия, обнаруженного еще

в XIX веке Леверье, и получив без всяких дополнительных гипотез результат, близкий к наблюдениям, Эйнштейн понял, что он на правильном пути, хотя сам еще смутно сознавал суть создаваемой теории, полагая, что он построил теорию, в которой равноправны и инерциально, и неинерциально движущиеся наблюдатели.

Тогда же он вычислил и величину отклонения света, проходящего вблизи поверхности Солнца, – эффект, который можно обнаружить при полном солнечном затмении. Работа Эйнштейна ярко вписывалась в ту мощную волну развития физики начала XX века, которая привела к открытию и использованию рентгеновских лучей, открытию электрона, структуры атома и атомного ядра, заложивших основы современной квантовой электроники и ядерной техники. Эйнштейн работал на передовой линии науки вместе с корифеями того времени Лоренцом, Планком, Ленардом, Резерфордом, Рентгеном и многими-многими другими.

Вот характеристика Эйнштейна, которую в 1911 г. дал Пуанкаре:

“Г-н Эйнштейн – один из самых оригинальных умов, которые я знал; несмотря на свою молодость, он уже занял весьма почетное место среди виднейших ученых своего времени. Больше всего восхищает в нем легкость, с которой он приспосабливается к новым концепциям и умеет извлечь из них все следствия. Он не держится за классические принципы и, когда перед ним физическая проблема, готов рассмотреть любые возможности. Благодаря этому его ум предвидит новые явления, которые со временем могут быть экспериментально проверены...”

Работа кипела в исследовательских центрах всего мира. В 1919 году было сделано множество принципиальных открытий, например, Резерфорд открыл протон и осуществил первую ис-

кусственную ядерную реакцию, превратив атомы азота в атомы кислорода. Грандиозные открытия новых галактик делались на 2,5-метровом телескопе в калифорнийской обсерватории Маунт-Вильсон. А Эддингтон во время полного солнечного затмения замерил предсказанное Эйнштейном отклонение луча света, проходящего вблизи поверхности Солнца.

Однако, оглядываясь назад, можно увидеть как неестественно пошла дальнейшая работа по пониманию общей теории относительности. В 1921 году Эйнштейн отправился в турне по Соединенным Штатам Америки для сбора средств на строительство университета в Иерусалиме [36]. Цель благородная, но явно коммерческая. Организация шоу-бизнеса в те времена была на уровне не менее высоком, чем сейчас: если вы хотите собрать деньги, нужна мощная реклама, нужна изюминка, нужен гений. И с 1919 года Эйнштейна начали “раскручивать” как шоу-гения. (К настоящему времени Эйнштейн настолько прочно вписался в историю мировой науки и культуры, что вряд ли эти мои изыскания смогут поколебать его положение, к чему я совершенно и не стремлюсь.) Но исследовать причины явлений нужно. А явление, о котором идет речь, – это отсутствие соответствия ОТО классической физике в той области, где оно должно бы быть.

Серьезное наблюдение Эддингтона в 1919 году с ходу было объявлено газетами (?? – почему не учеными?) Лондона и Нью-Йорка переворотом в науке. В послевоенную разруху народ всегда тянется к чуду, и это чудо представлялось газетными публикациями в виде теории относительности Эйнштейна, превозносимой выше всей прежней науки.

Вместо вдумчивого, со всесторонним анализом примеривания ОТО к возможности стать фундаментом физики, корректировки ее недочетов, она была объявлена “самой красивой из существующих физических теорий; она была построена Эйнштейном чисто логическим путем.” Эксперименты Галилея, лежащие в основе принципа эквивалентности, можно и не вспо-

минать. А попытки анализа теории пресекались уже чисто административно, вроде заявления, приведенного в эпиграфе, а нередко и более резко. При этом вердикт зачастую выносили не научные симпозиумы, а газетные статьи с хлесткими заголовками.

Борьба мнений в физике является не только нормой, но и силой,двигающей ее вперед. Так множество экспериментов с целью определить, являются ли рентгеновские лучи потоком частиц или волнами, привело не только к установлению многих свойств этих лучей, но и заложили основы совершенно новой отрасли физики и техники – рентгеноструктурного анализа.

“... Общая теория относительности до сих пор щеголяет в коротких штанишках “вундеркинда”, которому все позволено и даже – освобождение от экспериментальной проверки. Для истинного физика такое положение нетерпимо”, – мы уже приводили это мнение одного из крупнейших советских специалистов в ОТО А.З. Петрова.

Огражденная от серьезного анализа, ОТО была заложена в фундамент, будучи не сочетаемой с классической физикой. Эта несочетаемость, как было показано в предыдущей главе, проявляется, прежде всего, в понятии энергии.

### 3.4.1. Энергия и ОТО

Одним из высочайших достижений ОТО считается *принцип общей ковариантности*: при произвольных преобразованиях координат и времени уравнения теории не меняются. Однако именно этот принцип и разрушает мостик между ОТО и классической физикой.

Начнем с примера. Рассмотрим действие для релятивистской частицы в инвариантном – параметрическом – виде, описывая четырехмерную траекторию тела временем  $t(\tau)$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}(\tau)$ , зависимость которых от параметра  $\tau$  нужно най-

ти из уравнений динамики:

$$S = \int L d\tau; \quad L = -m c \sqrt{\left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2}. \quad (3.5)$$

В системе имеется четыре импульса

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau}\right)} = -\frac{m c^3 \frac{dt}{d\tau}}{\sqrt{\left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2}};$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)} = \frac{m c \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)}{\sqrt{\left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2}},$$

определяющие гамильтониан, равный нулю:

$$H = p_0 \frac{dt}{d\tau} + \left(\mathbf{p} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right) - L = 0. \quad (3.6)$$

При этом вариация по четырем переменным дает четыре динамических уравнения.

Если же в действии (3.5) описывать динамику не в абстрактном параметре  $\tau$ , а в переменной физического времени  $t$ :

$$L = -m c \sqrt{c^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} \equiv -m c \sqrt{c^2 - v^2}; \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3.7)$$

в системе оказывается три динамических импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m c \mathbf{v}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

определяющих ненулевой гамильтониан

$$H = (\mathbf{p} \mathbf{v}) - L = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.8)$$

Уменьшение числа динамических переменных при нековариантном описании (с явно выделенным временем) уменьшает число динамических уравнений до трех.

Равенство нулю гамильтониана проявляется в любой системе, инвариантной относительно замены переменной времени. В динамической системе на экстремалиях приращение действия определяется выражением  $dS = H dt$ , однако, если при вариации времени действие не изменяется, гамильтониан  $H$  обязан равняться нулю.

В частности, в общей теории относительности принцип общей ковариантности допускает любое преобразование переменных, в том числе и времени, поэтому энергия любой системы в ОТО в точности равна нулю. И не только энергия в целом, интегрально, но и плотность энергии в любой точке и в любой момент времени. Это явление подробно описано в самой фундаментальной монографии по ОТО Мизнера, Торна и Уилера [11, т. 2, с. 129, формула (21.12)]:

$${}^{\mathcal{H}}(\pi^{ij}, g_{mn}) = 0, \quad (21.12)$$

т. е.  $E = 0$ .”

Еще Шварцшильд получил внутреннее решение в ОТО для самогравитирующей жидкой капли [42]. Полная энергия этой капли (с учетом  $mc^2$ ) равна нулю (см. предыдущую главу). Если ее разрезать на две капли и развести их на большое расстояние так, чтобы каждая из них описывалась таким же решением Шварцшильда, энергия такой системы капель также будет равна нулю, то есть с точки зрения ОТО процесс разделения капель не требует совершения работы (точнее – требует совершения нулевой работы). При малой массе капли это решение должно бы переходить в классическую задачу, в которой, однако, разделение капель требует совершения работы. Таким образом, при всем богатстве достижений ОТО следует признать ее не как фундамент современной физики, а лишь как заготовку к созданию такого фундамента.

Так как в классической физике время вполне определено, энергия в общем случае не равна нулю, то **никакая общекосмологическая теория, в том числе, и ОТО, ни в каком пределе не может переходить в классическую физику.** В классической физике динамика, развитие Мира, совершается во **времени** и любое обобщение классической механики должно это время содержать.

Если, например, в *геометродинамике*, описанной в монографии [11], зафиксировать время как *глобальное*, не варьируемого масштаба (что приводит к уменьшению вариационных уравнений с десяти до девяти), то (при возможном уточнении лагранжиана) получается теория, базирующаяся на динамическом римановом трехмерном пространстве – *динамика пространства в глобальном времени*, приводящая к тем же экспериментально проверенным следствиям, считающимся подтверждением истинности ОТО (вращение перигелия Меркурия, отклонение световых лучей Солнцем, гравитационное красное смещение, поля Лензе–Тирринга и пр.). Десятое уравнение Эйнштейна, которое при этой процедуре исключается, – это и есть уравнение равенства нулю плотности энергии. Отказ от этого уравнения значительно расширяет круг решений теории.

В такой геометродинамике расширяющаяся космологическая модель связана с плотностью материи лишь как с параметром, и вообще имеются решения без вещества. Жесткая увязка в современной космологии плотности материи с темпом расширения, описываемым параметром Хаббла, является именно результатом требования равенства нулю суммарной энергии материи и динамического пространства. Оно, как известно, не выполняется в 5–25 раз. Именно для устранения этого громадного противоречия между наблюдениями и предсказаниями ОТО придумана “темная энергия”.

Да и все мучения с объединением квантовой теории с ОТО являются следствием нулевого гамильтониана. В “классической” квантовой теории он ненулевой, так что включение в квантовую

теорию гравитационного поля в том или ином виде не может приводить к нулевому гамильтониану, ибо в большинстве задач квантовой теории гравитацией можно пренебречь. Но если ее гамильтониан по модулю равен “классическому”, то гравитация должна учитываться во всех задачах, начиная с квантового осциллятора.

Непростая и во многом искусственно созданная история ОТО существенно задержала критическое рассмотрение поднятых вопросов. Да и сама теория с физической точки зрения выглядит по меньшей мере странно: решения десяти уравнений Эйнштейна определяют не эволюцию Мира, а единое решение, содержащее как прошлое, так и будущее.

Эта неопределенность в представлении пространства, динамики привела к другим проблемам в понимании (или непонимании) основ физики. Многие исследователи, пытавшиеся описать динамику различных процессов, настойчиво держались за эфир, противопоставляя физику на основе эфира – детерминированную, динамичную – физике на основе теории относительности с непонятной картиной развития Мира.

### 3.5. Эфир и пространство

Эфир, служивший Фарадею основным инструментом описания электромагнитного поля, к началу XX века стал ареной битвы. И опять здесь непримиримость мнений связана, прежде всего, с терминологической неопределенностью.

Причина стремления опираться на “эфир” четко выражена заслуженным ученым в области электротехники академиком В.Ф. Миткевичем в сборнике работ “Основные физические воззрения” [37], где он пишет:

“Абсолютно пустое пространство, лишенное всякого физического содержания, не может служить ареной распространения каких бы то ни было волн. ...



Признание эфира, в котором могут иметь место механические движения, т.е. пространственные перемещения элементарных объемов этой первоматерии, непрерывно заполняющей все наше трехмерное пространство, само по себе не является признаком механистической точки зрения. ...

Необходимо, наконец, вполне определенно реабилитировать “механическое движение”, надлежащим образом модернизировав, конечно, содержание этого термина, и раскрепостить физическую мысль, признав за ней законное право оперировать пространственными перемещениями соответствующих физических реальностей во всех случаях, когда мы стремимся познать конечную структуру того или иного физического процесса.”

Вина физики и физиков состоит в том, что само понятие пространства оказалось слабо исследованным, а после работ Маха [18] вообще превалировала точка зрения, что пространство и время – это просто творения нашего ума (среди философов такая точка зрения была популярна с древности). Даже проницательный Пуанкаре смотрел на пространство как на очень пассивную структуру [38]:

“Пространство может . . . подвергнуться любой деформации, и ничто не откроет нам этого, если наши инструменты испытали ту же самую деформацию. Таким образом, пространство в действительности аморфно; оно рыхлая, лишенная твердости форма, которую можно приложить ко всему; оно не имеет своих собственных свойств. Заниматься геометрией — это значит изучать свойства наших инструментов, т.е. свойства твердого тела.”

Эта точка зрения на пространство витала и витает в фи-

зике. В то же время люди с хорошей физической интуицией понимали и понимают, что то, что вроде бы является пустотой, есть активный физический объект, и в пассивном пространстве приходилось домысливать “эфир” – некоторую активную среду. Возможно, представление о пространстве не как о пассивном *вместилище*, а как об активном поле со своими динамическими законами и плотностью энергии, снимет для них проблему “эфира”.

Изучение пространства как физического объекта только начинается. Насколько велика энергия деформации пространства, в противовес мнению Пуанкаре, приведем пример из [6]:

Возьмем шар диаметром 20 см ( $R = 0.1$  м), делающий 1 оборот в секунду ( $\Omega = 2\pi c^{-1}$ ). Для вовлечения пространства вне шара в когерентное с ним вращение – так, чтобы шар не проворачивался относительно пространства, – нужно затратить энергию, выделяемую при аннигиляции 300 тысяч тонн вещества. Этот расчет выполнен на основе выражения для энергии в ТГВ (фактически – энергии АДМ) и точных вихревых решений.

Этот же пример разъясняет, почему наше пространство с высокой степенью точности евклидово: малейшие отклонения от евклидова пространства требуют громадных затрат энергии.

Этот же довод говорит не в пользу идущего от Уилера представления о “пространственной пене” на микроуровне.

# Глава 4

## Расширение Вселенной и гравитация

*Найдено решение уравнений Эйнштейна, описывающее метрику вокруг тяготеющего сферического тела в расширяющейся Вселенной. Гравитационная масса тела по мере расширения Вселенной уменьшается. Изучено движение свободных релятивистских частиц в полученной метрике. Гравитационный радиус изменяется не синхронно с массой. Параметры вращения в первом приближении не меняются.*

### 4.1. Введение

В XX веке расширение Вселенной установлено с высокой степенью очевидности благодаря выполнению в первой четверти века грандиозной программы наблюдений в обсерватории Маунт-Вильсон, результаты которой сконцентрированы на имени Эдвина Хаббла, и теоретическому продвижению, связанному, прежде всего, с именами Эйнштейна и Фридмана. Наиболее простое описание расширяющейся Вселенной представляется метрикой Эйнштейна–де Ситтера (см., например, [11]):

$$ds^2 = dt^2 - \sigma^2(t) (dR^2 + R^2 d\omega^2). \quad (4.1)$$

Здесь  $d\omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$  – метрика двумерной сферы единичного радиуса. Длины измеряются в световых годах, а время в годах, так что скорость света равна единице.

Время в метрике (4.1) – абсолютное мировое время. Сечение  $t = \text{const}$  – евклидово трехмерное пространство (абсолютное

пространство), масштаб которого меняется с течением времени:  $\sigma(t) = (1 + t/t_0)^{2/3}$ , где  $t_0 \approx 14$  млрд. лет – наше время от Большого взрыва, так что параметр  $t$  отсчитывает время от настоящего момента.

Расстояние от центра – точки, в которой полагается  $R = 0$ , до любой другой точки пространства с координатой  $R$  определяется величиной  $r = \sigma(t) R$ . С течением времени это расстояние меняется. При переходе от координат в пространстве  $R$  к параметризации расстояниями  $r$  метрика (4.1) изменяется:

$$R = \frac{r}{\sigma(t)}; \quad dR = \frac{1}{\sigma} \left( dr - r \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right); \quad \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \frac{2}{3(t_0 + t)}.$$

Подставляя эти дифференциалы в (4.1), получаем метрику

$$ds^2 = (1 - V^2) dt^2 + 2V dr dt - dr^2 - r^2 d\omega^2, \quad (4.2)$$

где

$$V \equiv V_\sigma = \frac{2r}{3(t_0 + t)}. \quad (4.3)$$

Тензор Эйнштейна для этой метрики принимает значения

$$(G_j^i) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ \rho V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho = \frac{4}{3(t_0 + t)^2}. \quad (4.4)$$

В момент времени  $t = -t_0$  плотность  $\rho$  обращалась в бесконечность – так называемый Большой взрыв.

Поле  $V$  в метрике (4.2) назовем *полем скоростей*.

Другим (точнее – первым) фундаментальным решением общей теории относительности является решение Шварцшильда [42] с метрикой

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2\kappa M}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left( 1 - \frac{2\kappa M}{c^2 r} \right)} - r^2 d\omega^2. \quad (4.5)$$

Эта метрика описывает пространство–время вне сферического тела с массой  $M$  в статическом случае.

Открытие космологического расширения Вселенной поставило вопрос: “Как меняется метрика тяготеющего тела с учетом глобального расширения?” Эта проблема была поднята в 1945 году А. Эйнштейном в совместной работе с Е. Штраусом [41]:

[Из-за расширения] “граничные условия, на которых основано решение Шварцшильда, непригодны для реальной звезды. В частности, граничные условия, пригодные для расширяющегося пространства, зависят от времени, поэтому априори можно ожидать, что поле, окружающее одиночную звезду, существенно зависит от времени.”

Попытка Эйнштейна и Штрауса сшивания решений Шварцшильда и Фридмана оказалась неудачной вследствие того, что в сшиваемых метриках переменная времени выбиралась совершенно различной физически. В метрике Фридмана компонента  $g^{00} = 1$  всюду и всегда, в то время как в решении Шварцшильда эта компонента зависит от радиуса, и, более того, под гравитационным радиусом пространственноподобна.

Мы уже рассмотрели преобразование метрики Шварцшильда, найденное в 1921 году Полем Пэнлеве (см. стр. 36):

$$ds^2 = dt^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + 2\sqrt{\frac{r_g}{r}} dr dt - dr^2 - r^2 d\omega^2, \quad (4.6)$$

где  $r_g$  – гравитационный радиус тела (напомним, что  $c = 1$ ).

Пространственное сечение  $t = \text{const}$  в метрике Пэнлеве является евклидовым пространством. Метрика (4.6) стационарна – поле скоростей не зависит от времени. Все компоненты тензора Эйнштейна для этой метрики равны нулю.

Нетрудно заметить, что метрика Пэнлеве имеет тот же вид (4.2), что и метрика однородного расширяющегося Мира, но с

другим полем скоростей:

$$V = V_P = \sqrt{\frac{r_g}{r}}. \quad (4.7)$$

Целью данной главы является нахождение совместного решения, которое вблизи массы (при малых радиусах и небольшом интервале времен) должно переходить в метрику Пэнлеве, а на бесконечности – в метрику Эйнштейна–де Ситтера на основе формы метрики (4.2).

## 4.2. Решение

Так как обе сшиваемые метрики имеют вид (4.2), обобщим в метрике (4.2) лишь выражение для поля скоростей (4.3):

$$V = \frac{V_r(r)}{t_0 + t} \quad (4.8)$$

и вычислим тензор Эйнштейна

$$(G_j^i) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2V_r^2}{r(t_0+t)^3} & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

где (штрихом обозначается производная по радиусу)

$$G_0^0 = \rho = \frac{V_r (V_r + 2r V_r')}{r^2 (t_0 + t)^2};$$

$$G_1^1 = -p = \frac{V_r (V_r + 2r (V_r' - 1))}{r^2 (t + t_0)^2};$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -p_{\perp} = \frac{r(V_r' - 1)V_r' + V_r (r V_r'' + 2V_r' - 1)}{r (t_0 + t)^2}.$$

Равенство нулю давления  $p$  приводит к уравнению:

$$V_r + 2r(V_r' - 1) = 0. \quad (4.10)$$

Выразим из этого уравнения  $V_r' = 1 - V_r/(2r)$  и, продифференцировав, найдем вторую производную:

$$V_r'' = \frac{3V_r - 2r}{4r^2}.$$

Подставив эти выражения в тензор Эйнштейна (4.9), получим:

$$(G_j^i) = \begin{pmatrix} \frac{2V_r}{r(t_0+t)^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2V_r^2}{r(t_0+t)^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в котором  $G_0^1 = V\rho$ , как и для однородной модели (4.4), но  $\rho = 2V_r/(r(t_0+t)^2)$ .

Выражение для  $V_r(r)$  находится из дифференциального уравнения (4.10) и содержит константу интегрирования  $C$ :

$$V_r(r) = \frac{2r}{3} + \frac{C}{\sqrt{r}}.$$

Первое слагаемое однозначно определяет расширение и малó при малых  $r$ , где основную роль играет второе слагаемое. При  $t = 0$  оно совпадает с полем скоростей метрики Пэнлеве (4.7), если выбрать константу  $C = t_0\sqrt{r_g}$ , что приводит полное поле скоростей к виду:

$$V = \frac{V_r}{t_0 + t} = \frac{1}{t_0 + t} \left( \frac{2r}{3} + t_0 \sqrt{\frac{r_g}{r}} \right). \quad (4.11)$$

Тензор Эйнштейна сохраняет вид (4.4). Компонента  $G_0^0$  определяет плотность энергии пылевидной материи (в трактовке ОТО):

$$G_0^0 = \frac{4}{3(t_0 + t)^2} \left( 1 + \frac{3t_0\sqrt{r_g}}{2r^{3/2}} \right). \quad (4.12)$$

Сингулярность плотности порядка  $r^{-3/2}$  интегрируема с элементом объема  $4\pi r^2 dr$ .

### 4.3. Движение пробных тел

Физический смысл любой метрики находится из того, как движутся в ней свободные материальные точки. Динамика свободной материальной точки определяется гамильтонианом  $h$  – выражению энергии через радиальный импульс и момент через обратный метрический тензор (все импульсы отнесены к массе):

$$g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 1; \quad p_0 = -h, \quad p_1 = p, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = l. \quad (4.13)$$

Гамильтониан свободной частицы  $h$  выражается из соотношения (4.13) для метрики (4.2) через обратную метрику:

$$\begin{aligned} (-h + V p)^2 - \left( p^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) &= 1; \\ h &= \sqrt{1 + p^2 + l^2/r^2} + \frac{p V_r(r)}{t_0 + t}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения движения находятся из уравнений Гамильтона:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + l^2/r^2}} + \frac{2r}{3(t_0 + t)} + \frac{t_0}{t_0 + t} \sqrt{\frac{r_g}{r}}; \quad (4.15)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{l^2}{r^3 \sqrt{1 + p^2 + l^2/r^2}} - \frac{p}{t_0 + t} \left( \frac{2}{3} - \frac{t_0 \sqrt{r_g}}{2r^{3/2}} \right); \quad (4.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{r^2 \sqrt{1 + p^2 + l^2/r^2}}. \quad (4.17)$$

При очень больших  $t_0$  – далеко по времени от Большого взрыва – в составляющей скорости основную роль играет часть с массой. Если время обращения по орбите мало по сравнению с  $t_0$ , то изменение масштаба при каждом обороте незначительно и траектории практически совпадают с траекториями в метрике



Шварцшильда. Однако за большое число оборотов или при не очень большом  $t_0$  изменение масштаба приводит к значительному изменению траекторий.

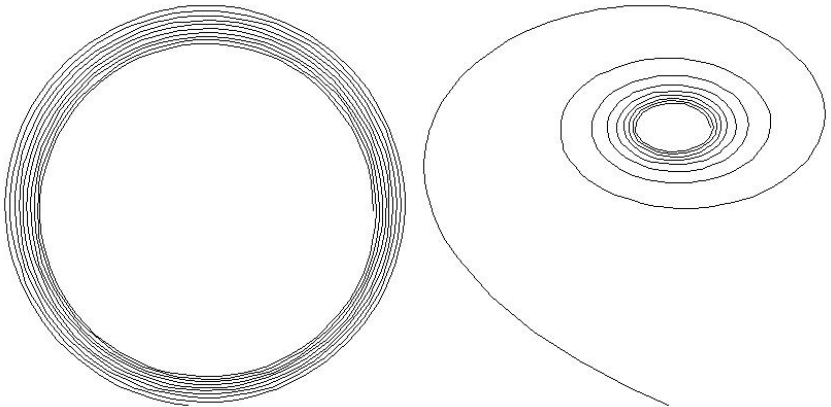
Рассмотрим, например, изменение круговых орбит за счет расширения. Базисом для такого анализа является описание орбит в поле Шварцшильда, проведенное в 1931 году Хаджи-харой [21] (см. также монографию Чандрасекара [22]).

На круговых орбитах (для релятивистских частиц) энергия и момент определяются радиусом орбиты  $r_0$ :

$$E = \frac{(r_0 - r_g)^2}{r_0 (r_0 - 1/5 r_g)}; \quad l^2 = \frac{r_g r_0^2}{2 r_0 - 3 r_g}.$$

Орбиты с такими параметрами в расширяющемся Мире будем называть *условно круговыми орбитами*. Предельной орбитой, на которой еще возможно круговое движение, является  $r_0 = 1.5 r_g$ .

Сравним сильно релятивистские орбиты (в масштабе  $r_g = 1$ ) с  $r_0 = 100$  при  $t_0 = 10^6$  и  $t_0 = 250000$  на интервале времени 100000:



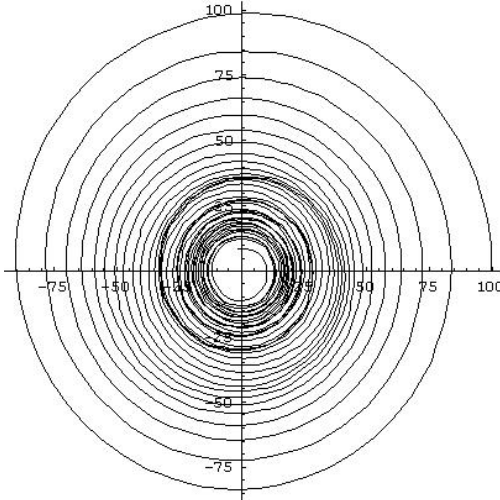
С течением времени орбиты не только увеличивают свой радиус, но и в конце концов частица улетает в бесконечность.

Это связано с исключительно важным свойством поля скоростей (4.11), которое можно интерпретировать как выражение (4.7) для метрики Пэнлеве с гравитационным радиусом и, следовательно, массой ( $2\kappa M = r_g c^2$ ), зависящими от времени:

$$r_g(t) = \frac{r_g^0}{(1 + t/t_0)^2}; \quad M(t) = \frac{M_0}{(1 + t/t_0)^2}. \quad (4.18)$$

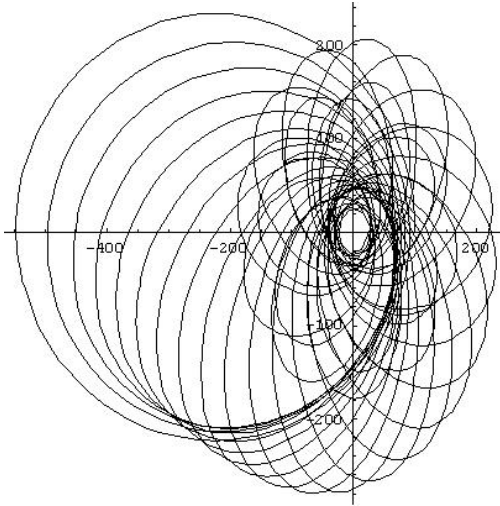
Гравитирующие свойства центрального тела в настоящий момент ( $t = 0$ ) определяются величиной  $M_0$ , однако по мере расширения мира его гравитационная масса падает, так что в конце концов оказывается не в состоянии удержать тело, первоначально вращавшееся по (почти) круговой орбите.

Этот эффект особенно существенен при рассмотрении траекторий в обратном по времени направлении. Тяготеющая масса возрастает, а радиус орбиты, как видно из рисунка, уменьшается:



Условно эллиптические орбиты образуют более сложные узоры из вращающихся эллипсов уменьшающихся (назад по време-

ни) размеров. Орбиты так же, как и условно круговые, доходят до предельно малых размеров.



#### 4.4. Назад по времени

Эффект уменьшения отношения гравитационной массы к постоянной во времени инерциальной приводит к важным следствиям при рассмотрении истории Вселенной – движению по времени назад.

Пусть имеется звезда радиуса  $R$  и массы  $M_0$  с малым в настоящий момент гравитационным радиусом  $r_g^0$ . При движении назад по времени ее гравитационный радиус возрастает и в какой-то момент достигает внешнего радиуса. Пусть на поверхности этой звезды покоится малое тело массы  $m$ . Из гамильтониана (4.14) следует условие для покоящегося тела

$$\dot{r} = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} - mV = 0; \quad p = \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Чтобы тело находилось в равновесии, со стороны поверхности звезды его должна поддерживать сила

$$F = -\dot{p} = \frac{\partial h}{\partial r} = p V' = -\frac{m V V'}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Приближение к гравитационному радиусу означает стремление модуля  $V$  к единице. При этом вес каждого тела на поверхности звезды стремится к бесконечности.

Гравитационный радиус (при малых  $r$  в абсолютном времени  $t$ ) достигает радиуса  $R$  при условии:

$$r_g = \frac{r_g^0 t_0^2}{t_1^2} = R; \quad t_1 = t_0 \sqrt{\frac{r_g^0}{R}}.$$

Здесь  $r_g^0$  – гравитационный радиус звезды в настоящий момент. Например, для Солнца  $R = 695\,500$  км,  $r_g = 3$  км, откуда  $t_1 = 27\,000\,000$  лет.

Раньше этого времени Солнце не могло существовать.

## 4.5. Динамика гравитационного радиуса

В предыдущем разделе *гравитационный радиус* полагался определяемым лишь тяготеющей массой, как она входит в статические метрики Шварцшильда или Пэнлеве.

Более точно гравитационный радиус определяется условием  $g_{00} = 0$ ;  $V^2 = 1$  в метрике (4.2). Если для метрики Пэнлеве это соотношение определялось только гравитационной массой  $M$ , то в динамической метрике в него дает вклад и составляющая расширения. В данном параграфе мы будем отсчитывать время не от настоящего момента, а от сингулярности, а также, учитывая, что квадратный корень может иметь два знака, поле скоростей будем представлять в виде

$$V_{\pm} = \frac{2r}{3t} \pm \frac{\sqrt{R^3}}{t\sqrt{r}}, \quad (4.19)$$

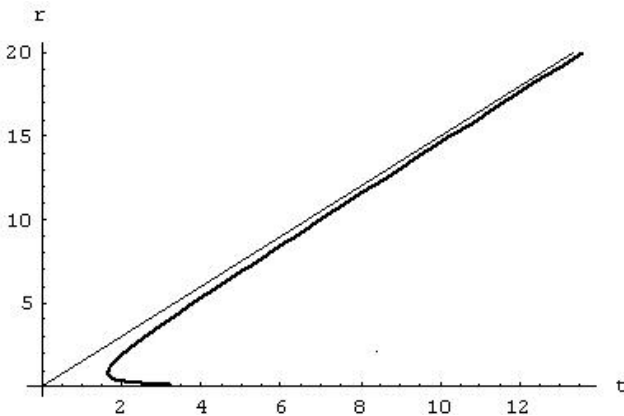
где  $R$  – абсолютный массовый радиус, не меняющийся в процессе расширения и определяемый через массу в настоящий момент абсолютного времени  $t_0$  выражением:

$$R^3 = 2 \kappa M t_0^2. \quad (4.20)$$

Рассмотрим сначала динамику гравитационного радиуса для решения  $V_+$ :

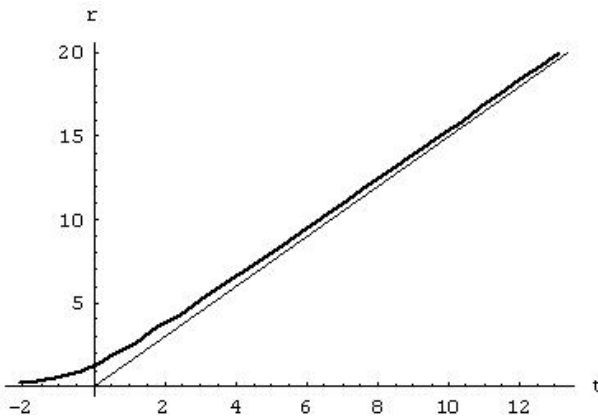
$$V_+ = 1; \quad \frac{2r}{3} + \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{r}} = t.$$

В масштабе  $R = 1$  график выглядит так:

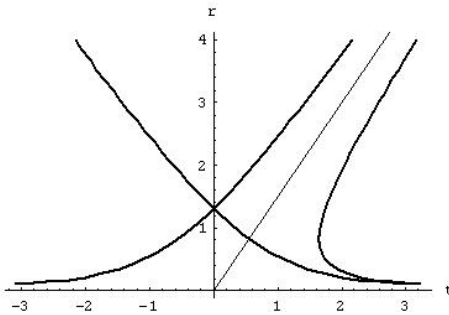


Поля скоростей, по модулю меньших скорости света ( $V_+ < 1$ ), находятся лишь справа от графика. Критическая точка ( $r_0 = (3/4)^{2/3} = 0.8255 t_0 = 1.65$ ) определяет момент времени с нулевым размером области вне горизонта. В более ранние моменты времени скорости в любой точке сверхсветовые.

Для поля скоростей с отрицательным знаком  $V_-$  динамика гравитационного радиуса совершенно иная:



Здесь внутренний гравитационный радиус определяется левой ветвью графика, которая для положительного поля скоростей целиком лежит при отрицательных временах.



При больших временах имеется два гравитационных радиуса: внутренний, определяемый гравитирующей массой, и внешний, определяемый ростом масштаба (скорость разбегания равна скорости света). Прямая линия показывает зависимость гравитационного радиуса от времени в отсутствие массы. В этом случае единственный горизонт монотонно сжимается до нулевого.

Не следует поспешно объявлять сверхсветовые области *нефизичными*. В случае простого фридмановского расширения *физичными* являются все точки плоского пространства, а горизонт лишь отделяет *видимую* для какого-то наблюдателя часть Вселенной.

## 4.6. Вращение

Вращающаяся звезда характеризуется моментом количества движения, определяющим вдали от звезды поле Лензе–Тирринга. Точное стационарное решение вакуумных уравнений Эйнштейна при удалении от поверхности звезды определяется метрикой Керра, содержащей параметр вращения  $a$ , так что при  $a \rightarrow 0$  метрика Керра переходит в метрику Шварцшильда. В книге [7] метрика Керра была переведена в глобальное время (см. также далее стр. 140), при этом пространственная часть метрики всюду риманова, но в отличие от метрики Пенлеве не является плоской.

Однако в линейном приближении по параметру вращения  $a$  – на радиусах  $r \gg a$  – пространственная часть переходит в евклидово пространство:

$$ds^2 = dt^2 - (dr - V dt)^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta (d\varphi - \Omega dt)^2. \quad (4.21)$$

В расширяющемся Мире (в линейном приближении по  $a$ ) в метрике (4.21) модифицируется только радиальная часть поля скоростей

$$V = \frac{2r}{3(t_0 + t)} + \sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{t_0}{(t_0 + t)}; \quad \Omega = \frac{r_g a}{r^3} = \frac{3L}{2r^3}. \quad (4.22)$$

Здесь  $L$  – не зависящий от времени момент импульса вращающейся звезды, как это следует из формулы (7.35) при рассмотрении слабых полей (см. далее).

При этом тензор Эйнштейна в линейном приближении по  $a$  имеет вид

$$(G_j^i) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ \rho V^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho \Omega & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

с плотностью энергии, не зависящей от вращения:

$$G_0^0 = \frac{4}{3(t_0 + t)^2} \left( 1 + \frac{3t_0 \sqrt{r_g}}{2r^{3/2}} \right). \quad (4.24)$$

Если тяготеющая масса в процессе расширения уменьшается, то момент количества движения  $L$  остается неизменным, а следовательно, по мере расширения Вселенной процессы вращения оказываются существенными на более поздних стадиях.

## 4.7. Заключение

Полученное сферически симметричное решение определяется единственным дифференциальным уравнением (4.10) и условием расширения – простой зависимостью поля скоростей от времени (4.8). Оно содержит единственную константу интегрирования. Решение приводит к нетривиальному выражению для компоненты тензора Эйнштейна  $G_0^0$  (4.12).

С точки зрения общей теории относительности для реализации такого решения требуется нетривиальное непрерывное распределение пылевидной материи, определяемое компонентой  $G_0^0$ , – его нужно специально сформировать распределением этой пыли.

С точки зрения *динамической теории пространства в глобальном времени* [7] это вакуумное решение, найденное еще в 2008 году С.Ю. Губановым [43]. Выражение для компоненты  $-G_0^0$  в этом подходе определяет плотность энергии динамического пространства и является результатом решения.



Таким образом:

- При рассмотрении ранних стадий развития Вселенной особенности возникают значительно позже времени Большого Взрыва. В решении Фридмана не было параметров, поэтому оно имеет особенность только в момент Большого Взрыва.
- Большое красное смещение квазаров может быть связано не только с кинематическим изменением длины волны за счет расширения Вселенной, но и с мощным гравитационным красным смещением в удаленных от нас по времени звездах, имевших во время излучения значительно большие гравитационные массы.
- Если на ранних стадиях расширения Вселенной притяжение превалировало над вращением, то с ростом масштаба процессы вращения начинают превалировать над притяжением.
- Этим может объясняться спиралевидность большого числа галактик, а также эффекты аномального распределения скоростей во вращающихся галактиках, обычно объясняемые некоей “темной материей”.

## Глава 5

# Влияет ли плотность звезд на скорость расширения Вселенной?

На основании точного решения уравнений Эйнштейна вокруг сферической массы в расширяющейся Вселенной строится асимптотическая метрика множества звезд с учетом расширения. Показано, что плотность звезд на темп расширения не влияет.

### 5.1. Введение

Философы давно обращали внимание на “отсутствие в теории относительности достаточно точного определения времени, учитывающего его топологические свойства, например, линейную упорядоченность” [44, 45]. Эти претензии снимаются переходом (возвратом) к глобальному времени. Задачи о сшивании различных решений получают однозначную определенность в виде глобального времени, сохраняемого в сшиваемых решениях.

В предыдущей главе найдено точное решение уравнений Эйнштейна для метрики вне одиночной массы с граничными условиями на бесконечности, определяющими расширяющуюся Вселенную. Метрика строится в *глобальном времени* ( $g^{00} = 1$ ) при пространственном сечении статическом евклидовом:

$$ds^2 = (1 - V^2) dt^2 + 2V dr dt - (dr^2 + r^2 d\omega^2) \quad (5.1)$$

(в системе единиц со скоростью света  $c = 1$ ), где

$$V = \frac{2r}{3(t_0 + t)} + \sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{t_0}{t_0 + t}. \quad (5.2)$$

В выражении (5.2) время  $t$  отсчитывается от настоящего времени, а  $t_0$  – это время от Большого Взрыва.

Сразу же возникает вопрос: можно ли использовать это решение для описания множества звезд? Очевидно, что точное решение для одиночного тела удалось получить вследствие высокой (сферической) симметрии задачи. Надеяться на точное решение для множества звезд, тем более, расположенных достаточно хаотично, не приходится.

Однако выражение для поля скоростей (5.2) представляется двумя слагаемыми, первое из которых описывает однородное расширение, а второе связано с тяготеющей массой и убывает при удалении от нее. Если преобразованием координат избавиться от однородной составляющей, то в межзвездном пространстве (в точках, удаленных от любой звезды на расстояние значительно большее, чем ее гравитационный радиус) метрика представится как метрика однородно расширяющегося пространства плюс малые добавки полей скоростей от звезд. В линейном по этим добавкам приближении получится просто сумма полей скоростей от каждой звезды.

## 5.2. Преобразование метрики

В глобальном времени ( $g^{00} = 1$ ) обратный метрический тензор представляется через обратный метрический тензор  $\gamma^{ij}$  трехмерного сечения  $t = \text{const}$  и поле скоростей  $V^i$ :

$$g^{00} = 1; \quad g^{0i} = V^i; \quad g^{ij} = V^i V^j - \gamma^{ij}. \quad (5.3)$$

При этом метрика определяется выражением

$$ds^2 = (1 - \gamma_{ij} V^i V^j) dt^2 + 2 \gamma_{ij} V^j dx^i dt - \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.4)$$

Преобразование координат  $x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , зависящее от времени, при неизменном времени (то есть оставаясь в глобальном времени) изменяет дифференциалы

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} d\xi^k + \dot{x}^i dt.$$

Подставляя их в (5.4), получим метрику в новых координатах:

$$ds^2 = (1 - \gamma_{ij} (V^i - \dot{x}^i) (V^j - \dot{x}^j)) dt^2 + \quad (5.5)$$

$$+ 2\gamma_{ij} (V^j - \dot{x}^j) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} d\xi^k dt - \gamma_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^l} d\xi^k d\xi^l;$$

$$\tilde{V}_j = \gamma_{jk} (V^i - \dot{x}^i) \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}. \quad (5.6)$$

Используем этот калибровочный вид преобразования поля скоростей для выделения из выражения (5.2) однородной части:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{2R}{3(t_0 + t)}; \quad R = (1 + t/t_0)^{2/3} r.$$

После такого преобразования координат метрика принимает вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r(1 + t/t_0)^{8/3}}\right) dt^2 + \quad (5.7)$$

$$+ \frac{2\sqrt{r_g}}{\sqrt{r}(1 + t/t_0)^{2/3}} dr dt - (1 + t/t_0)^{4/3} dl^2,$$

где  $dl^2$  – метрика трехмерного евклидова пространства в сферической системе координат. Тензор Эйнштейна, вычисленный по метрике (5.7), имеет отличными от нуля всего две компоненты, определяющими тензор энергии–импульса пылевидной материи с полем 4-скоростей

$$u^\alpha = (1, V, 0, 0); \quad u_\beta = g_{\beta\alpha} u^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad (5.8)$$

где *собственное поле скоростей* звезды

$$V = \sqrt{\frac{r_g}{r}} \frac{1}{(1 + t/t_0)^2}, \quad (5.9)$$

и с плотностью энергии

$$\epsilon = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{4}{3(t_0 + t)^2} + \frac{2\sqrt{r_g}}{t_0 r^{3/2} (1 + t/t_0)^3} \right). \quad (5.10)$$

Отличны от нуля компоненты  $T_0^0 = 4\pi\epsilon$  и  $T_0^1 = 4\pi\epsilon V$ .

На расстояниях, значительно превышающих гравитационный радиус звезды ( $r \gg r_g$ ), то есть, практически, для любых точек вне звезды, поле скоростей (5.9) представляется как малая добавка к метрике Эйнштейна–де Ситтера

$$ds^2 = dt^2 - (1 + t/t_0)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.11)$$

описывающей однородно расширяющуюся Вселенную. В эту метрику переходит метрика (5.7) при  $r_g/r \rightarrow 0$ .

### 5.3. Множество звезд

Выражение (5.9) записано для звезды, расположенной в начале координат. Если звезда расположена в точке с декартовыми координатами  $\mathbf{r}_s$ , то точное решение примет тот же вид с полем скоростей

$$V_{(s)}^i = (x^i - x_{(s)}^i) \sqrt{\frac{r_g}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|^3}} \frac{1}{(1 + t/t_0)^2}, \quad (5.12)$$

также малым вдали от звезды. При этом координата  $\mathbf{r}_s$  звезды не меняется со временем.

Если мы рассмотрим бесконечное множество звезд с центрами в точках  $\mathbf{r}_i$ , хаотически, но статистически равномерно разбросанных в пространстве, то их центры масс будут испытывать лишь флуктуационные малые ускорения от притяжения остальных звезд, оставаясь в среднем неподвижными.

Вследствие малости добавок к метрике (5.11) полей их собственных скоростей (5.12), рассыпанная по всему пространству сумма их полей скоростей

$$\mathbf{v} = \sum_s \mathbf{v}_{(s)} \quad (5.13)$$

как малая добавка (компонента  $g^{0i}$ ) к метрике Эйнштейна–де Ситтера ( $V^2 \rightarrow 0$ ) определяет приближенное решение уравнений Эйнштейна с множеством звезд. По мере расширения Мира растет временной множитель в знаменателе  $V$ , за счет чего с течением времени решение становится асимптотически точным.

## 5.4. Обсуждение

Закон Хаббла о скоростях разбегания справедлив для галактик, *видимых* с Земли, что означает, что между наблюдаемой галактикой и нами нет никакой “звездной пыли” – фактически – только пустое пространство, или, по современным представлениям, связанным с ОТО, только “темная энергия”.

Поэтому найденное распределение плотности (5.10) с точки зрения ОТО следует полностью отнести на счет так называемой “темной энергии”, приписывая ей не 70% критической плотности (5.10), а все 100. С точки зрения динамики пространства представленная метрика – это “вакуумное решение”, а  $(-\epsilon)$  – плотность энергии расширяющегося пространства.

Каждая звезда имеет свою конечную массу, в достаточно большом объеме пространства массы звезд определяют некоторую плотность звездного вещества, “звездной пыли”, но вне зависимости от этой плотности изменение масштаба во времени происходит по закону  $t^{3/2}$ .

В общей теории относительности встает вопрос, как же быть с выполнением уравнения

$$G_0^0 = \frac{16 \pi \kappa}{c^4} T_0^0 ? \quad (5.14)$$

Решение (5.2) было получено из единственного условия в уравнениях Эйнштейна – равенства нулю давления в межзвездном пространстве, а выражение для плотности получилось при этом из отличной от нуля компоненты тензора Эйнштейна  $G_0^0$ . Уравнение  $G_0^0 \sim \epsilon$  при выводе этой метрики не решалось, оно оказалось просто ненужным. Плотность  $\epsilon$  не задавалась из наблюдений, а определялась из уравнений Эйнштейна, так же как и в однородном случае в решении Эйнштейна–де Ситтера, откуда и возникла проблема “темной энергии”.

Описанная ситуация связана с переопределенностью уравнений Эйнштейна. Она обсуждается в следующей главе.

# Глава 6

## Темная энергия – энергия динамического пространства

*Стендовый доклад на конференции HEA – 2008 в Институте космических исследований.*

### 6.1. Энергия расширяющегося мира

К концу XX века астрофизическими наблюдениями было установлено, что наш расширяющийся Мир является глобально плоским. Для описания его крупномасштабной динамики в ОТО необходимо использовать метрику Эйнштейна–де Ситтера:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - m^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6.1)$$

Из десяти уравнений Эйнштейна для этой метрики нетривиальными остаются два:

$$G_0^0 = 3 \left( \frac{\dot{m}}{cm} \right)^2 = \frac{8\pi k}{c^4} \epsilon; \quad (6.2)$$

$$G_j^i = \delta_j^i \left( 2 \frac{\ddot{m}}{c^2 m} + \frac{\dot{m}^2}{c^2 m^2} \right) = -\delta_j^i \frac{8\pi k}{c^4} p; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.3)$$

С учетом термодинамического соотношения

$$d\epsilon = -(\epsilon + p) \frac{dV}{V} = -3(\epsilon + p) \frac{dm}{m}$$

легко находится первый интеграл уравнения (6.3):

$$\frac{4}{3} \pi m^3 \epsilon - \frac{c^2}{2k} m \dot{m}^2 = E. \quad (6.4)$$



Здесь  $E$  – константа интегрирования, которой можно приписать смысл энергии, так как первое слагаемое – это энергия вещества в шаре радиуса  $r$ , определяемого соотношением  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , при этом физический радиус пропорционален масштабу  $m$ . Тогда второе слагаемое следует трактовать как динамическую энергию пространства с переменным масштабом. В данной задаче она отрицательно определена, так что в целом энергия может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Уравнение (6.2) – *основное уравнение космической динамики* – выполняет довольно пассивную роль: оно требует, чтобы эта константа интегрирования равнялась нулю. Уравнение (6.3) определяет динамику масштаба пространства, а уравнение (6.2) ограничивает допустимые значения энергии: суммарная энергия пространства и материи есть константа, но **эта константа с точки зрения ОТО обязана равняться нулю.**

## 6.2. Глобальное время и глобальное пространство

Равенство нулю энергии в ОТО есть следствие *принципа общей ковариантности*. При вариации действия Гильберта  $S$  по компонентам метрического тензора

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} d_4x,$$

если допустимы произвольные преобразования координат (общая ковариантность), перемешивающие все компоненты метрического тензора, то равенство нулю вариаций по одним компонентам приводит к равенству нулю вариаций по всем другим компонентам.

Если же вариация по компоненте  $g^{00}$  не приравнивается нулю (поэтому уравнение, связанное с  $G_{00}$ , отсутствует), то ответствующая переменная  $t$  оказывается выделенной из всех

других (глобальное время), не подлежащей преобразованию без изменения ее физического смысла, и возможно выполнение глобального соотношения  $g^{00} = 1$ . Это *довариационное* условие оставляет лишь 9 уравнений, которым должна подчиняться метрика пространства–времени. Это не есть выбор калибровки (координатных условий в ОТО), все равно оставляющей 10 уравнений Эйнштейна после вариации действия по 10 компонентам метрики.

Таким образом, отказ от принципа общей ковариантности приводит к совершенно другой физике, опирающейся на принципы, существенно отличные от принципов ОТО: пространство и время оказываются абсолютными сущностями.

Следует отметить, что хотя современная космология и полагает, что ее основой является общая теория относительности (так как положение о расширении пространства пришло из ОТО), ее фундаментом являются понятия **абсолютное время** и **абсолютное пространство**. Например, в описании Большого взрыва, произошедшего 14 млрд. лет назад, не уточняется, по часам какого наблюдателя. Когда идет речь о красном смещении удаленных объектов, их удаление определяется в однозначно понимаемом космическом пространстве. Да и в самой модели Фридмана пространство и время исходно однозначно разделены. Тензор энергии–импульса в задаче Фридмана диагонален с компонентами  $(\epsilon, -p, -p, -p)$ , что говорит о материи, **покоящейся относительно пространства**. Движение материи относительно пространства – *пекулярные скорости галактик* – объективно замеряется астрономами. Ни о какой общей ковариантности в современной астрофизике нет речи.

### 6.3. “Темная энергия” – это несостоятельность ОТО

Уравнение Фридмана (6.2) можно переписать через постоянную Хаббла  $H = \dot{m}/m$ :

$$\frac{3}{8\pi k} H^2 = \frac{\epsilon}{c^2} = \rho_m.$$

Более полувека проходили тщательные измерения и левой, и правой частей этого уравнения. Итог: правая часть ( $\rho_m$ ) в 25 раз меньше левой, то есть это уравнение – следствие ОТО – не выполняется. Но, как для любого неравенства, равенство легко восстанавливается:

$$\frac{3}{8\pi k} H^2 \equiv \rho_c = 25 \rho_m = \rho_m + 24\rho_m = \rho_m + \rho_D,$$

где  $\rho_D = 24\rho_m$  – плотность *темных субстанций*. Таким образом, не только обеспечено 100%-е выполнение уравнения Фридмана, а громадная невязка уравнения, вместо того чтобы констатировать неверность этого уравнения, объявляется открытием новой формы вещества – “темной энергии” (еще одна невязка в непонятности динамики спиральных галактик и групп галактик еще в 30-е годы XX века была объявлена новой формой материи – “темной материей”, масса которой в галактиках раз в 5 больше массы вещества).

До сих пор в физике было принято считать, что если тщательные многократные измерения противоречат уравнениям какой-либо теории, **эта теория должна подвергнуться пересмотру.**

### 6.4. Динамика пространства в глобальном времени

В задаче Фридмана расширение Мира, имеющего в некоторый момент времени  $t_0$  масштаб  $m_0$  и скорость расширения

$\dot{m}_0$ , вполне определяется только вторым уравнением (6.3). При этом начальный масштаб (определяющий плотность вещества в данный момент) и постоянная Хаббла не связаны никаким соотношением.

Более того, это уравнение дает динамические решения даже в отсутствие вещества: уравнение

$$2 \frac{\ddot{m}}{m} + \frac{\dot{m}^2}{m^2} = 0$$

имеет своим первым интегралом  $-m \dot{m}^2 = E = -|E|$  с отрицательной константой интегрирования и обеспечивает решение по закону  $m \sim t^{2/3}$ .

Динамика трехмерного пространства произвольной начальной конфигурации (*теория глобального времени – ТГВ*) базируется на следующих физических положениях:

**Пространство** является материальным носителем геометрических свойств. Оно трехмерно и имеет риманову структуру.

**Глобальное время** — это собственное время пространства, единое для всех его точек. Оно всюду и всегда течет одинаково равномерно, само являясь мерой равномерности.

Пространство — *носитель геометрических свойств*, потому что геометрические свойства определяются метрическим тензором, шесть компонент которого являются главными полевыми переменными пространства.

Тела движутся в пространстве, динамика полей (например, электромагнитного) происходит в пространстве. Для каждой движущейся точки определена *абсолютная скорость* относительно пространства.

Относительно пространства может совершаться абсолютное движение, или, наоборот, в некоторой системе координат суще-

ствуует поле скоростей пространства. Таким образом, динамика пространства описывается шестью компонентами поля метрического тензора  $\gamma_{ij}(x^i, t)$ , определяющего его геометрические свойства в заданный момент времени, и тремя компонентами поля абсолютных скоростей  $V^i(x^j, t)$ .

Система отсчета, в которой точки пространства с течением времени не меняют своих координат (хотя геометрия пространства при этом может меняться), является *абсолютной инерциальной системой*. В ней поле скоростей отсутствует.

Все законы динамики вещества и полей определены в абсолютной инерциальной системе. Содержащаяся в них производная по времени (глобальному) выражается в неинерциальной системе (содержащей поле скоростей) через *инвариантную производную* тензоров. Вывод общего выражения инвариантной производной по времени ( $D_t$ ) дан в [6, 7] (а также далее на стр. 157). Приведем достаточно общий пример, позволяющий записать эту производную для любого тензорного поля:

$$D_t Q_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial t} Q_{jk}^i + V^s Q_{jk;s}^i - V_{;s}^i Q_{jk}^s + V_{;j}^s Q_{sk}^i + V_{;k}^s Q_{js}^i. \quad (6.5)$$

Она состоит из  $r+2$  составляющих, где  $r$  – ранг тензора. При  $r = 0$  (скаляр) мы имеем эйлерову конструкцию переносной производной:

$$D_t f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (6.6)$$

с двумя составляющими: частной производной по времени и “переносным” членом, определяемым полем абсолютных скоростей. Для тензоров, имеющих индексы, к каждому индексу (верхнему или нижнему) добавляется слагаемое, определяемое производной поля скоростей. Для контравариантного векторного поля:

$$D_t A^i = \frac{\partial}{\partial t} A^i + V^j \frac{\partial}{\partial x^j} A^i - A^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \equiv \dot{A}^i + [V, A]^i, \quad (6.7)$$

где квадратными скобками обозначен *коммутатор векторных полей*, используемый в теории алгебр Ли.

Инвариантная производная по времени метрического тензора

$$D_t \gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + V_{i;j} + V_{j;i} \quad (6.8)$$

определяет симметричный тензор скоростей деформации пространства:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2c} D_t \gamma_{ij} = \frac{1}{2c} (\dot{\gamma}_{ij} + V_{i;j} + V_{j;i}). \quad (6.9)$$

Лагранжиан представляется интегралом по объему пространства с инвариантной мерой  $\sqrt{\gamma} d_3x$  как разность кинетической и потенциальной энергии:

$$L = \frac{c^4}{16\pi k} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2 + R) \sqrt{\gamma} d_3x. \quad (6.10)$$

Здесь  $R$  – скалярная кривизна трехмерного пространства.

Варируя действие по шести компонентам пространственной метрики, введя импульсы  $\pi_j^i = (\mu_j^i - \delta_j^i \mu_s^s) \sqrt{\gamma}/2$ , получим шесть уравнений динамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_j^i}{\partial t} = & -\partial_s (V^s \pi_j^i) + V^i_{,s} \pi_j^s - V^s_{,j} \pi_s^i + \\ & + \delta_j^i \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\mu_l^k \mu_k^l - \mu_k^k \mu_l^l) - \frac{\sqrt{\gamma}}{2} G_j^i + \frac{8\pi k}{c^4} \sqrt{\gamma} Q_j^i, \end{aligned} \quad (6.11)$$

где  $G_j^i$  – тензор Эйнштейна пространства (трехмерного), а  $Q_j^i$  – тензорный ток, получающийся вариацией действия прочей (вложенной) материи по метрическому тензору пространства – *внешний тензорный ток*.

Вариация по полю скоростей  $V^i$  дает три уравнения связи:

$$\nabla_i \pi_j^i = \partial_i \pi_j^i - \Gamma_{jk}^i \pi_i^k = 0. \quad (6.12)$$

Эти уравнения линейны по скоростям  $V^i$ .

Как в любой лагранжевой теории, определяется энергия:

$$E = \frac{c^4}{16 \pi k} \int (\mu_j^i \mu_i^j - (\mu_j^j)^2 - R) \sqrt{\gamma} d_3 x. \quad (6.13)$$

Важным ее свойством является знаконеопределенность: плотность энергии может быть как положительной, так и отрицательной.

Если наложить еще одно (десятое) условие – равенство нулю плотности энергии, то эти (уже десять) уравнений совпадают с десятью уравнениями Эйнштейна общей теории относительности (ОТО). Таким образом, решения ОТО содержатся среди решений ТГВ, но, кроме них, имеется и множество других решений с ненулевой плотностью энергии.

В отличие от ОТО ТГВ описывает *динамику физического объекта – пространства*. Однозначно определенное выражение для энергии динамического пространства как снимает множество проблем космологии, так и приводит к однозначно определенной структуре *квантовой теории гравитации*.

## 6.5. Точные решения

Почти все решения ОТО являются решениями ТГВ с нулевой энергией, хотя перевод некоторых решений ОТО в ТГВ требует комплексных преобразований, то есть они оказываются нефизичными (например, космологическая задача ОТО с ультрарелятивистской материей). Космические поля в ТГВ могут иметь как положительную, так и отрицательную энергию.

Например, в [6] приведены точные решения для космических вихрей. Вследствие большого множителя  $\frac{c^4}{16 \pi k}$  в выражении для энергии (6.13) вихри, как и отклонения пространства от евклидова, обладают огромными энергиями.

Задача Шварцшильда в глобальное время была переведена в 1921 году П. Пенлеве: пространство плоское, имеется ради-

альное поле скоростей (см. раздел 2.3.2). Также в ТГВ (то есть к метрике с  $g^{00} = 1$ ) приводится метрика Керра. Алгоритм перевода решений из ОТО в ТГВ опирается на *принцип эквивалентности* [7] (см. стр. 29).

Однако решения Шварцшильда и Пэнлеве – это не одно и то же решение, просто в различных системах координат. Как показано в разделе 2.3.2, дифференциалы времени Шварцшильда ( $t_S$ ) и Пэнлеве ( $t$ ) связаны соотношением  $dt_S = dt + w(r) dr$ , где

$$w = \frac{V}{1 - V^2}; \quad V = \sqrt{\frac{r_g}{r}}.$$

Интегрируя, получаем

$$t_S - t = \int w dt = 2\sqrt{r_g r} + r_g \ln \left( \frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_g}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_g}} \right).$$

Если рассматривать решения при  $0 < r < \infty$ , то видно, что в области  $0 < r < r_g$  (внутренность “черной дыры”) разность времен содержит мнимую часть  $\pi r_g i$ , так как выражение под логарифмом становится отрицательным. Если считать эту область физически реализуемой, то одна из метрик оказывается **физически недопустимой**. Различие между этими метриками оказывается *физически значимым*.

Общая теория относительности допускает оба этих решения. Теория глобального времени считает физической метрику Пэнлеве. В этом случае изучение *полного пространства Шварцшильда* (координаты Крускала, Финкельштейна и др.) оказывается просто математическим упражнением в комплексном расширении пространственно-временной метрики. Пространство в метрике Пэнлеве вплоть до  $r = 0$  является трехмерным евклидовым, и лишь в точке  $r = 0$  находится сингулярность.

Наиболее важными для космологии задачами, имеющими точное решение [7], являются

- Конформно-плоская динамика, снимающая проблему “темной энергии”.



- Космические вихри, представляющие в совершенно другом свете проблему “темной материи”. Вращение в спиральных галактиках определяется вихрями поля скоростей, а не притяжением звезд, которые лишь визуализируют вихри поля скоростей в пространстве, как клубы дыма или пылинки визуализируют вихри в воздухе.
- И, наконец, приведенное в разделе 4.2 решение для поля скоростей вокруг массивного тела в расширяющейся Вселенной (4.11), показывающее существенное уменьшение гравитационного притяжения по мере расширения Вселенной и, соответственно, существенное его возрастание при рассмотрении космологической истории назад во времени.

## 6.6. Проблема

Лагранжиан (6.10) получен из лагранжиана Гильберта в ОТО фиксацией глобального времени соотношением  $g^{00} = 1$  и тем самым обеспечена преемственность решений ОТО. Однако в этом лагранжиане, не нарушая допустимых преобразований ТГВ (преобразований координат с зависимостью от времени), перед потенциальной энергией, представимой скалярной кривизной пространства, может стоять любой коэффициент, вплоть до противоположного знака. Эта проблема должна быть исследована как с точки зрения внутренней структуры теории, так и с точки зрения экспериментальных следствий.

## Глава 7

# Поля скоростей в космической динамике

*В этой главе выводятся приближенные – линейные – уравнения динамики пространства. В плоском трехмерном пространстве основным полем космической динамики является поле скоростей. Преобразованием временной переменной – переходом к “местному” времени – можно устранить безвихревую часть этого поля, а вместо него возникает классический гравитационный потенциал. В расширенной космической динамике уравнение потенциала дополняется уравнениями для вихревой части поля скоростей. Решениями этих уравнений являются поле сопровождения – поле скоростей вокруг равномерно и прямолинейно движущегося тела, а также поле Лензе–Тирринга вокруг вращающегося тела. Записаны законы движения материального тела в этих полях, описано движение спутника массивной вращающейся планеты, модификация уравнения эйконала, а также других полей.*

### 7.1. Введение

Поле Лензе–Тирринга – это поле скоростей, возникающее вокруг вращающегося тела. Оно было описано в 1918 году [46] в линейном приближении только что созданной к тому времени общей теории относительности (ОТО). К настоящему времени наблюдения за движением искусственных спутников Земли с хорошей степенью точности подтвердили наличие рассчитан-

ных Лензе и Тиррингом возникающих за счет вращения Земли дополнительных ускорений ее спутников. Однако этот эффект исключительно мал. Он должен быть значительно бóльшим у планет-гигантов Юпитера и Сатурна, вращающихся быстрее Земли (сутки – около десяти часов). Наличие колец Сатурна, вращающихся в его экваториальной плоскости, интуитивно связывается с этим полем, однако описание колец на динамическом уровне до сих пор отсутствует.

Еще значительно больше должны быть поля такого типа в масштабах галактик. Свыше половины галактик являются спиральными, в них происходит вихревое движение звезд, и, видимо, возникающие за счет этого движения поля типа Лензе–Тирринга должны быть значительными. Их влияние на движение также должно быть существенным, так что движение звезд в спиральных галактиках должно заметно отличаться от движения под действием только гравитационного потенциала Ньютона–Лапласа. Это отличие и было обнаружено в конце 20-х – начале 30-х годов прошлого столетия, однако объяснение этого отличия пошло по средневековому пути – с помощью гипотетической “темной материи”.

Немало парадоксов накопилось и в других разделах космической динамики. Например, анализ движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) привел к представлению о несимметричности Земли, существенному различию распределения масс в северном и южном полушариях, так что коэффициенты мультипольного разложения гравитационного потенциала оказываются ненулевыми как для нечетных, так и для четных мультиполей [47].

В современной космической динамике, основывающейся на общей теории относительности, поля Лензе–Тирринга рассматриваются скорее как экзотика, “подтверждение справедливости ОТО”, чем как непрременная составляющая активной динамики Космоса. По этим представлениям описать их можно, только идя от ОТО, решая уравнения Эйнштейна.

Но, если принимать поле Лензе–Тирринга как физическую реальность, создаваемую вращающимся телом, то прямолинейно и равномерно движущееся тело также должно создавать вокруг себя поле скоростей. Представив вращающееся тело как множество тонких соосных круговых нитей, вращающихся с одинаковой угловой скоростью, получим (в линейном приближении – как это и было вычислено Лензе и Тиррингом) результирующее поле как суперпозицию полей от каждой кольцевой нити. Если же рассмотреть одну нить, то поле вблизи нее на расстояниях, меньших радиуса нити, можно представить как суперпозицию полей, создаваемых ближайшими движущимися точками, составляющими эту нить и движущимися равномерно и практически прямолинейно. Да и прямо из уравнений Эйнштейна в линейном приближении видно, что равномерно и прямолинейно движущееся тело создает вокруг себя недиагональные компоненты метрики  $g^{0i}$ , трактуемые как *поле скоростей* абсолютного пространства в системе наблюдателя. Эти компоненты также влияют на движение малых тел (ИСЗ) вокруг движущегося массивного тела (Земли) и могут приводить к эффектам, трактуемым сейчас как несимметрия Земли.

Общая теория относительности связала гравитационные эффекты с кривизной четырехмерного пространства–времени, однако ее физические принципы и математическая техника, ориентированные на описание точечного наблюдателя, оказались недостаточными для описания распределенных объектов, например, в масштабе галактики.

Дальнейшее развитие теория пространства и времени получила в “Динамической теории пространства в глобальном времени” (теории глобального времени – ТГВ), разработанной автором [5–8, 39, 40]. Основным физическим объектом этой теории является трехмерное пространство, метрика которого может меняться с течением *глобального времени*, являющегося по сути собственным временем пространства как распределенного объекта.

Система, в которой координаты точек пространства не меняются с течением времени, называется *глобальной инерциальной системой*. Координаты точек пространства в *неинерциальных* системах могут достаточно произвольным образом зависеть от времени. В этих системах возникает поле *абсолютных скоростей*  $V^i(x^j, t)$ , определяющее скорость перемещения точки пространства (инерциальной системы) относительно соответствующей точки неинерциальной системы с заданными в ней координатами.

Необходимый математический аппарат для описания процессов в неинерциальных системах пополняется техникой *инвариантного дифференцирования по времени*. Инвариантная производная по времени от тензорного поля – это производная по времени от этого поля в глобальной инерциальной системе, вычисленная в неинерциальной системе. Она описана выше на стр. 101, а подробный вывод приведен далее на стр. 157.

## 7.2. Движение свободной частицы

Лагранжиан нерелятивистской свободной частицы массы  $m$ , движущейся со скоростью  $\dot{x}^i$  в неинерциальной системе с метрикой  $\gamma_{ij}$  и полем скоростей  $V^i(\mathbf{r}, t)$ , определяется скоростью относительно пространства с компонентами  $v^i = \dot{x}^i - V^i$ , через которые выражается кинетическая энергия:

$$L = T = \frac{m \gamma_{ij} (\dot{x}^i - V^i) (\dot{x}^j - V^j)}{2}. \quad (7.1)$$

Лагранжиан определяет импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m \gamma_{ij} (\dot{x}^j - V^j), \quad (7.2)$$

а затем после выражения скорости через импульс

$$\dot{x}^i = \frac{\gamma^{ik} p_k}{m} + V^i(\mathbf{r}, t)$$

и гамильтониан

$$H = p_i \dot{x}^i - L = \frac{\gamma^{ij} p_i p_j}{2m} + p_i V^i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)). \quad (7.3)$$

Опускание и поднятие индексов производится метрическим тензором и обратным ему, а скалярное произведение определяется как обычно:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) = p_i V^i = \gamma_{ij} p^i V^j = \gamma^{ij} p_i V_j; \quad V_j = \gamma_{jk} V^k; \quad \mathbf{p}^2 = \gamma^{ij} p_i p_j.$$

Выражение для гамильтониана можно представить в виде

$$H = \frac{(\mathbf{p} + m \mathbf{V})^2}{2m} - m \frac{\mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t)}{2}.$$

Обозначив  $\mathbf{p} + m \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}'$  и добавочный член, не зависящий от параметров движущегося тела, – через *гравитационный потенциал*

$$- \frac{\mathbf{V}^2(\mathbf{r}, t)}{2} \equiv \phi(\mathbf{r}, t), \quad (7.4)$$

получим гамильтониан, формально совпадающий с гамильтонианом частицы, движущейся в потенциале  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , однако, чтобы проведенное преобразование импульсов было *каноническим преобразованием* – чтобы компоненты нововведенного импульса  $p'_i$  коммутировали друг с другом (в смысле скобок Пуассона), – необходимо, чтобы поле  $V_i(\mathbf{r}, t)$  было безвихревым:  $\mathbf{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = 0$ . Таким образом, безвихревое поле скоростей может быть формально заменено гравитационным потенциалом. С точки зрения физики пространства и времени это означает переход к описанию процессов в местном времени, где гравитационный потенциал модифицирует компоненту четырехмерной метрики и пространственный масштаб.

Так как исключить можно лишь безвихревую часть поля скоростей, в общем виде необходимо разделить поле скоростей на вихревую и безвихревую составляющие, наложив, например,

на первую условие  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ , а вторую преобразовав в гравитационный потенциал. Таким образом, в гамильтониан, описывающий движение материальной точки в местном времени, включается как вихревая часть поля скоростей, так и гравитационный потенциал, и эти поля являются определяющими в космической динамике. Движение материальных точек определяется гамильтонианом

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) + m\phi(\mathbf{r}, t). \quad (7.5)$$

### 7.3. Приближение малых масштабов

Открытие в 1846 году астрономом И.Г. Галле планеты Нептун сыграло важную роль в науке. Галле обнаружил новую планету в месте, определенном У. Леверье и (независимо) Дж. Адамсом на основании некоторого отклонения движения планеты Уран от вычисленной по теории Ньютона траектории. Считая верными законы Ньютона, Адамс и Леверье предположили, что отклонение траектории Урана от расчетной орбиты вызвано гравитационным полем еще более далекой планеты, и, используя математическую технику, разработанную Лапласом, не только нашли параметры траектории, но и указали точное положение этой новой планеты. Семейство планет Солнечной системы обрело еще одно украшение, а самое главное – была продемонстрирована справедливость механики Ньютона во всей (уже расширенной за счет новой планеты) Солнечной системе.

Но кроме этого с высокой точностью была доказана евклидовость пространства в масштабе Солнечной системы, так как законы Ньютона определены именно для тел, движущихся в евклидовом пространстве. В теории глобального времени показывается, что искривление пространства требует огромных энергетических затрат, поэтому почти евклидовость пространства – просто результат ограниченности энергии.

Любое риманово пространство в малой области приблизительно является плоским (точно – в бесконечно малой), поэтому можно предположить, что эффекты кривизны пространства проявляются на значительно бóльших масштабах или в недрах массивных астрономических объектов. Что же остается в столь малых областях космоса (Солнечная система, возможно, галактика), где пространство практически плоское? Поле скоростей и гравитационный потенциал.

## 7.4. Местное время

Осознание смысла глобального времени – *абсолютного времени* Ньютона – позволило перенести на распределенные объекты основные понятия специальной теории относительности: местное время Лоренца – собственное время движущегося тела – и относительное пространство, переносимое в ОТО лишь для точечных объектов.

Местное время связывается с некоторой средой, покоящейся относительно себя, однако составляющие ее материальные точки движутся относительно абсолютного пространства. При четырехмерном описании в глобальном времени  $g^{00} = 1$ , а компонента  $g_{00} = 1 - V^2/c^2$ , где  $V$  – абсолютная скорость движения данной точки. Собственное время точек среды  $\tau$  связано с глобальным временем  $t$  соотношением

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt. \quad (7.6)$$

Замена безвихревых компонент поля скоростей гравитационным потенциалом – это переход к *местному времени* некоторой распределенной среды. В отличие от собственного времени движущейся материальной точки в ОТО, в ТГВ возникает местное (собственное) время распределенного объекта.



Четырехмерная метрика (при обозначении  $\nu = \phi/c^2$ )

$$ds^2 = (1 + 2\nu(x, y, z)) c^2 dt^2 - (1 - 2\nu(x, y, z)) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (7.7)$$

в линейном по  $\nu$  приближении приводит к единственной ненулевой компоненте тензора Эйнштейна

$$G_0^0 = 2 \Delta \nu.$$

В теории глобального времени показывается, что различные решения ОТО являются одновременно решениями ТГВ с плотностью энергии, всюду равной нулю. Для слабых полей справедливо и обратное утверждение: так как плотность энергии квадратична по параметру малости линейного приближения, то в линейном приближении энергия решений ТГВ равна нулю – и они автоматически оказываются решениями ОТО.

Добавление к метрике (7.7) выражаемых через поле скоростей недиагональных компонент  $g^{0i} = V^i$  в линейном приближении по  $\phi$  и  $\mathbf{V}$  приводит к тензору Эйнштейна, определяющему уравнения для этих полей. Но так как к девяти функциям, характеризующим пространство и поле скоростей, мы добавили десятую – гравитационный потенциал  $\phi$ , нужно вернуть изначальное число степеней свободы, уменьшив на единицу число искомым функций, положив  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ .

## 7.5. Дифференциальные уравнения полей

Итак, уравнения для гравитационного потенциала и поля скоростей выводятся как линейное приближение уравнений ТГВ в местном времени:

$$\Delta \phi = 4 \pi \kappa \rho; \quad (7.8)$$

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi; \quad (7.9)$$

$$\frac{1}{4} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{4 \pi \kappa}{c^2} \mathbf{j}; \quad (7.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (7.11)$$

Здесь  $\rho$  – плотность вещества, а  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  – вектор тока. Дивергенция уравнения (7.10) тождественно равна нулю вследствие (7.8) и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (7.12)$$

При заданных источниках и граничном условии отсутствия сингулярностей и убывания полей на бесконечности эти уравнения однозначно определяют гравитационный потенциал и поле скоростей.

Уравнения (7.8)–(7.10) могут быть получены варьированием лагранжиана с плотностью

$$L_V = -\frac{(\nabla\phi)^2}{8\pi\kappa} + \frac{(\dot{\mathbf{V}} \nabla\phi)}{4\pi\kappa} + \frac{c^2}{32\pi\kappa} (\operatorname{rot} \mathbf{V})^2 \quad (7.13)$$

по полям  $\phi$  и  $\mathbf{V}$  при дополнительном уравнении (7.11).

## 7.6. Сферическая система координат

В большинстве задач астрономии удобной оказывается сферическая система координат с метрикой

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (7.14)$$

Осесимметричные векторные поля можно разделить на два класса:

**а.** Азимутальные, с отличной от нуля компонентой  $V^\varphi$ :

$$\mathbf{V}_a = (0, 0, V^\varphi(r, \vartheta)).$$

**б.** Осевые, с отличными от нуля компонентами  $V^r$  и  $V^\vartheta$ :

$$\mathbf{V}_b = (V^r(r, \vartheta), V^\vartheta(r, \vartheta), 0).$$

В обоих классах компоненты не зависят от азимутального угла  $\varphi$ .

Векторные поля этих классов специфически ведут себя по отношению к оператору ротора: ротор поля класса  $a$  есть поле класса  $b$  и наоборот:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{V}_a) \equiv \Omega_b = \left( -2 \cos \vartheta V^\varphi - \sin \vartheta V_{,\vartheta}^\varphi, \sin \vartheta \left( \frac{2}{r} V^\varphi + V_{,r}^\varphi \right), 0 \right); \quad (7.15)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{V}_b) \equiv \Omega_a = \left( 0, 0, \frac{V^{r,\vartheta} - (r^2 V^\vartheta)_{,r}}{r^2 \sin \vartheta} \right). \quad (7.16)$$

Поэтому оператор  $\mathbf{rot} \mathbf{rot}$ , действуя на поле определенного класса, дает векторное поле того же класса. Физически это означает, что поле скоростей принадлежит тому же классу, что и его источник.

## 7.7. Поле сопровождения

Пространство с покоящимся сферически симметричным телом обладает сферической симметрией. Если тело равномерно и прямолинейно движется относительно пространства, то появляется выделенное направление и симметрия понижается до осевой.

Найдем поле скоростей вокруг и внутри однородного шара, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ , с массой  $M$  и внешним радиусом  $R$ , так что плотность вещества этого тела

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

При движении тела векторный ток направлен вдоль оси движения – имеет компоненты  $j^r$  и  $j^\vartheta$ , то есть является полем класса  $a$ , следовательно, и генерируемое им поле сопровождения также является полем класса  $a$ .

Для мультипольных полей (степенным образом зависящих от радиуса) в сферической системе координат (в фигурных скобках мы записываем контравариантные компоненты векторов)

$$\mathbf{V} = \{u_r(\vartheta) r^m, u_\vartheta(\vartheta) r^{m-1}, 0\}.$$

Условие  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  определяет выражение  $u_r$  через  $u_\vartheta$ :

$$u_r = -\frac{1}{m+2} \frac{1}{\sin \vartheta} (\sin \vartheta u_\vartheta(\vartheta))',$$

так что остается всего одна неопределенная функция  $u_\vartheta(\vartheta)$ :

$$u_m = \left\{ -\frac{r^m}{m+2} (u_\vartheta' + \operatorname{ctg} \vartheta u_\vartheta), r^{m-1} u_\vartheta, 0 \right\}. \quad (7.17)$$

Так как для любого вихревого поля  $\mathbf{A}$  тождество  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  выражает  $r$ -компоненту через  $\vartheta$ -компоненту, то достаточно следить только за  $\vartheta$ -компонентой двойного ротора поля скоростей:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{V})_\vartheta = \\ & = -\frac{m}{m+2} r^{m-3} \left( u_\vartheta'' + \operatorname{ctg} \vartheta u_\vartheta' + (m+1)(m+2) u_\vartheta - \frac{u_\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \right). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Вне тела источником является лишь производная по времени от вектора

$$\mathbf{g}_e = \left\{ -\frac{\kappa M \mathbf{r}}{r^3}, 0, 0 \right\}.$$

При переходе из лабораторной системы, в которой тело движется, в систему, связанную с самим движущимся телом, производная по времени выражается через инвариантную производную (6.7). Так как в системе, связанной с телом, потенциал постоянен, эта производная определяется коммутатором вектора постоянной скорости тела

$$\mathbf{v} = v \left\{ \cos \vartheta, -\frac{1}{r} \sin \vartheta, 0 \right\}$$

с вектором ускорения:

$$\mathbf{J}_e = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{g}_e] = \frac{\kappa M}{c^2} v \left\{ \frac{2 \cos \vartheta}{r^3}, \frac{\sin \vartheta}{r^4}, 0 \right\}. \quad (7.19)$$

Уравнение вне тела

$$\frac{1}{4} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{V}_e = \mathbf{J}_e$$

приводит к радиальной зависимости с  $m = -1$  и угловым соотношением

$$u''_{\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta u'_{\vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} u_{\vartheta} = \frac{4 \kappa M}{c^2} v \sin \vartheta, \quad (7.20)$$

частное решение которого  $u_{\vartheta} = -2 \kappa M v \sin \vartheta$ . Таким образом, внешнее поле определяется вектором

$$\mathbf{V}_e = \frac{2 \kappa M}{c^2} v \left\{ \frac{2 \cos \vartheta}{r}, -\frac{\sin \vartheta}{r^2}, 0 \right\}. \quad (7.21)$$

Ротор этого поля

$$\mathbf{rot} \mathbf{V}_e = \left\{ 0, 0, -\frac{4 \kappa M v}{c^2 r^3} \right\}. \quad (7.22)$$

Поле является вихревым и не исключается добавкой к гравитационному потенциалу.

Внутри движущегося тела имеется источник от вещества

$$\mathbf{j}_i = 4\pi k \rho \mathbf{v} = \frac{3 \kappa M v}{c^2 R^3} \left\{ \cos \vartheta, -\frac{\sin \vartheta}{r}, 0 \right\} \quad (7.23)$$

и источник переменного потенциала. Поле ускорения внутри тела

$$\mathbf{g}_i = -\frac{\kappa M}{R^3} \mathbf{r}$$

определяет этот источник:

$$\mathbf{J}_i = \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{g}_i] = -\frac{\kappa M v}{c^2 R^3} \left\{ \cos \vartheta, -\frac{\sin \vartheta}{r}, 0 \right\}. \quad (7.24)$$

Сравнение с общим полем  $\mathbf{V}_m$  приводит к значению  $m = 2$  для внутреннего поля. Уравнение

$$\frac{1}{4} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{V}_i = \mathbf{J}_i + \mathbf{j}_i$$

определяет внутреннее поле скоростей

$$\mathbf{V}_i = \frac{4 \kappa M v}{5 c^2 R^3} \{ -r^2 \cos \vartheta, 2 r \sin \vartheta, 0 \} \quad (7.25)$$

с ротором, постоянным внутри тела:

$$\mathbf{rot} \mathbf{V}_i = \left\{ 0, 0, -\frac{4 \kappa M v}{c^2 R^3} \right\}$$

и совпадающим с ротором внешнего поля на границе (7.22).

Так как дивергенция не равна нулю только для источников, то на границе тела ( $r = R$ ) нормальная к границе (радиальная) составляющая источников непрерывна:

$$J_e - (J_i + j_i)|_{r=R} = \left\{ 0, \frac{3 \kappa M v}{c^2 R^4} \sin \vartheta, 0 \right\}. \quad (7.26)$$

Однако внешнее (7.21) и внутреннее (7.25) поля на границе тела (при  $r = R$ ) не совпадают. Общая теория линейных дифференциальных уравнений предлагает для достижения непрерывности добавить однородные решения – векторные поля  $\bar{\mathbf{V}}$  с равными нулю ротором и дивергенцией, то есть являющиеся градиентом некоторого скалярного поля  $\Phi(r, \vartheta)$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа  $\Delta \Phi = 0$ . Мультипольными решениями этого уравнения во внешней области являются

$$\Phi_l^e = \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}}$$

и во внутренней области –

$$\Phi_l^i = r^l P_l(\cos \vartheta),$$

где  $P_l$  – полиномы Лежандра.

Угловая зависимость компонент внутреннего и внешнего полей (7.21) и (7.25) показывает, что нужно добавлять однородные поля с  $l = 1$ , так как  $P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$ . Тогда дополнительное безвихревое внешнее поле определяется скаляром

$$\Phi^e = \frac{\cos \vartheta}{r^2}; \quad \bar{\mathbf{V}}^e = \left\{ -\frac{2 \cos \vartheta}{r^3}, -\frac{\sin \vartheta}{r^4}, 0 \right\}, \quad (7.27)$$

а внутреннее

$$\Phi^i = r \cos \vartheta; \quad \bar{\mathbf{V}}^i = \left\{ \cos \vartheta, -\frac{1}{r} \sin \vartheta, 0 \right\}. \quad (7.28)$$

Сшивание при  $r = R$  требует непрерывности двух компонент поля скоростей – радиальной и касательной – при добавлении внешнего поля (7.27) с неопределенным коэффициентом  $a 2 \kappa M v R^2 / c^2$  и внутреннего (7.28) с неопределенным коэффициентом  $b 2 \kappa M v / (R c^2)$ , определяемых затем из условий непрерывности:

$$\left\{ (2 - 2a) \frac{\cos \vartheta}{R}, (-1 - a) \frac{\sin \vartheta}{R^2}, 0 \right\} = \left\{ \left(-\frac{2}{5} + b\right) \frac{\sin \vartheta}{R}, \left(\frac{4}{5} - b\right) \frac{\sin \vartheta}{R^2}, 0 \right\}.$$

Отсюда  $a = 1/5$ ,  $b = 2$ .

Таким образом, вне равномерно и прямолинейно движущейся сферы создается *поле сопровождения* вне тела

$$\mathbf{V}_e = \frac{2 \kappa M v}{c^2} \left\{ \left( \frac{2}{r} - \frac{2 R^2}{5 r^3} \right) \cos \vartheta, \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{R^2}{5 r^4} \right) \sin \vartheta, 0 \right\} \quad (7.29)$$

и внутри тела

$$\mathbf{V}_i = \frac{4 \kappa M v}{5 c^2 R^3} \left\{ (-r^2 + 5 R^2) \cos \vartheta, \left( 2r - \frac{5 R^2}{r} \right) \sin \vartheta, 0 \right\}. \quad (7.30)$$

На границе тела (при  $r = R$ ) оба поля имеют компоненты

$$\mathbf{V}_b = \frac{2\kappa M}{c^2} v \left\{ \frac{8 \cos \vartheta}{5R}, -\frac{6 \sin \vartheta}{5R^2}, 0 \right\}. \quad (7.31)$$

Во внешнем поле основной является вихревая составляющая (7.21).

Параметром малости этих полей по отношению к скорости движения тела является отношение гравитационного радиуса к внешнему радиусу тела  $\alpha = 2\kappa M/(c^2 R)$ . В динамике космических объектов, для которых этот параметр не мал, поля сопровождения могут играть существенную роль.

При неоднородном распределении плотности вещества движущегося тела возникают решения в виде высших мультиполей.

Вне движущегося тела поле сопровождения является безвихревым, и преобразованием переменной времени, допускаемым общей теорией относительности, может быть уничтожено. Однако необходимость сшивания с вихревым полем внутри тела не допускает такого преобразования. Таким образом, *поле сопровождения определяет абсолютное движение тела относительно пространства.*

## 7.8. Поле Лензе–Тирринга

Кроме полей сопровождения, определяемых движением тела, вращающиеся космические объекты создают вокруг себя поля Лензе–Тирринга.

Вращение однородного шара радиуса  $R$  и массы  $M$  вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\omega$  создает токи, имеющие только не зависящую от координат компоненту  $j^\varphi$ , то есть являющиеся полем класса  $a$ .

В сферической системе ( $z = \cos \vartheta$ )  $V^\varphi \equiv \Omega = r^l P(z)$

$$(z^2 - 1)P'' + \frac{4z^2 - 3}{z} P' = l(l + 3)P. \quad (7.32)$$



Так как источник не зависит от угла  $\vartheta$ , то и поле скоростей не зависит от него, поэтому в правой части уравнения (7.32) должен быть нуль. Внешнему (вакуумному) решению соответствует  $l = -3$ , внутреннему, с однородным источником, значение  $l = 2$ :

$$v^\varphi \equiv \Omega = B R^2; \quad (\mathbf{rot rot v})^\varphi = -10 B = -\frac{16\pi k}{c^2} \rho \omega = \frac{12 \kappa M \omega}{R^3 c^2}.$$

Отсюда находится константа  $B$ , определяющая внутреннее решение:

$$B = \frac{6 \kappa M \omega}{5 c^2 R^3}; \quad \Omega = \frac{6 \kappa M \omega r^2}{5 c^2 R^3} = \frac{3}{5} \alpha \omega \frac{r^2}{R^2}; \quad \alpha = \frac{2 \kappa M}{c^2 R}. \quad (7.33)$$

Внешнее решение при  $r = R$  сшивается с внутренним

$$\frac{b}{R^3} = \frac{6 \kappa M \omega}{5 R}; \quad b = \frac{6}{5} \kappa M \omega R^2,$$

откуда окончательно находим внутреннее поле

$$\Omega = \frac{3}{10} \alpha \omega \frac{r^2}{R^2}. \quad (7.34)$$

Вне тела  $\Omega = b/r^3$ . При  $r = R$  внутреннее и внешнее решения совпадают, откуда определяется константа  $b$ :

$$\frac{b}{R^3} = \frac{3}{10} \alpha \omega; \quad b = \frac{3}{10} \alpha \omega R^3.$$

Внешнее поле

$$\Omega = \frac{3}{10} \alpha \frac{\omega R^3}{r^3} = \frac{3 k J \omega}{2 c^2 r^3}; \quad J = \frac{2}{5} M R^2 \quad (7.35)$$

– момент инерции вращающегося тела.

Неоднородность распределения вещества или угловой скорости вращающегося тела приводит к высшим мультипольным решениям.

## 7.9. Движение в поле Лензе–Тирринга

Вращающаяся планета массы  $M$  (в приближении однородного распределения масс) создает вокруг себя гравитационный потенциал  $\phi = -\kappa M/r$  и монополюсное поле Лензе–Тирринга, в сферических координатах имеющее одну компоненту поля скоростей  $V^\varphi = \Omega R^3/r^3$ . Здесь константы  $R$  и  $\Omega$  – радиус планеты и значение угловой скорости на ее поверхности.

Гамильтониан материальной точки в таком поле

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{1}{2r^2} \left( p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \right) + p_\varphi \Omega \frac{R^3}{r^3} - \frac{\kappa M}{r}. \quad (7.36)$$

Угол  $\varphi$  поворота вокруг оси вращения планеты в гамильтониан не входит, вследствие чего сопряженный момент  $p_\varphi \equiv l$  постоянен на орбите.

Гамильтониан (7.36) допускает движение по орбитам с постоянным радиусом (*сферическим орбитам*), изменение которого определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r = 0; \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \left( p_\vartheta^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta} \right) - 3l\Omega \frac{R^3}{r^4} - \frac{\kappa M}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Угол  $\vartheta$  и сопряженный ему импульс входят в гамильтониан (7.36) и условие сферичности орбиты (7.37) через квадрат момента количества движения

$$L^2 = p_\vartheta^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad (7.38)$$

коммутирующий с гамильтонианом (в смысле скобок Пуассона), и потому являющимся постоянной величиной на орбите. Если  $p_r = 0$ , то уравнение (7.37) связывает константу радиуса

( $r = \text{const}$ ) с другими константами, определяющими траекторию.

На сферической орбите угол  $\vartheta$  периодически уменьшается, достигая минимального угла  $\vartheta_0$ , при котором  $p_\vartheta = 0$ , а затем увеличивается. Вычислим энергию на сферической орбите, характеризуемой углом  $\vartheta_0$  в высшей точке ( $p_\vartheta = 0$ ):

$$E = \frac{l^2}{2r^2 \sin^2 \vartheta_0} - \frac{l \Omega R^3}{r^3} - \frac{\kappa M}{r}.$$

Условие сферичности (7.37) для этой орбиты

$$\frac{l^2}{r^3 \sin^2 \vartheta_0} - 3 \frac{l \Omega R^3}{r^4} - \frac{\kappa M}{r^2} = 0$$

определяет момент  $l$  из квадратного уравнения:

$$l^2 - 3l \frac{\Omega R^3}{r} \sin^2 \vartheta_0 - \kappa M r \sin^2 \vartheta_0 = 0.$$

В линейном по  $\Omega$  приближении

$$l = \frac{3 \Omega R^3}{r} \sin^2 \vartheta_0 + \sqrt{\kappa M r} \sin \vartheta_0;$$

$$l^2 = \kappa M r \sin^2 \vartheta_0 + 3 \Omega R^3 \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} \sin \vartheta_0,$$

и энергия зависит от угла ориентации орбиты  $\vartheta_0$ :

$$E = -\frac{\kappa M}{2r} + \frac{\Omega R^3}{2r^2} \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} \sin \vartheta_0. \quad (7.39)$$

Она минимальна при  $\vartheta_0 = -\pi/2$ , то есть когда орбита лежит в экваториальной плоскости и вращение происходит в направлении, противоположном  $\Omega$ .

Изменение во времени угла  $\vartheta$  определяется условием постоянства полного углового момента (7.38), в которое не входит

поле скоростей  $\Omega$ , то есть на сферической орбите меняется так же, как и на круговой при движении вокруг невращающегося центрального тела. В частности, малые колебания относительно экваториальной плоскости ( $\vartheta = \pi/2 - \varepsilon$ ) определяются частью гамильтониана

$$H_\varepsilon = \frac{p_\vartheta^2}{2r^2} + \frac{l^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \approx \frac{p_\varepsilon^2}{2r^2} + \frac{l^2 \varepsilon^2}{2r^2},$$

описывающей колебания с кеплеровской частотой

$$\Omega_\vartheta = \frac{l}{r^2}. \quad (7.40)$$

Скорость изменения угла  $\varphi$  на сферической орбите по сравнению с задачей Кеплера приобретает постоянную добавку:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial l} = \frac{l}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \Omega \frac{R^3}{r^3}.$$

Таким образом, сферические орбиты представляют собой круговые кеплеровы орбиты, равномерно вращающиеся вокруг полярной оси с угловой скоростью  $\Omega R^3/r^3$ .

Этот результат можно получить и более просто: так как поле скоростей  $V^\varphi = \Omega R^3/r^3$  зависит только от радиуса, то переход во вращающуюся с такой угловой скоростью систему координат полностью устраняет поле скоростей на сфере радиуса  $r$ , и динамика на этой сфере происходит по законам Ньютона без поля вращения.

Орбиты, на которых радиус меняется, имеют более сложное строение: их скручивание по углу  $\varphi$  увеличивается при приближении к планете и уменьшается при удалении, так что за большое количество оборотов траектория заматывается как клубок.

## 7.10. Другие физические поля

Полная система космической динамики состоит из уравнений (7.8)–(7.11) и уравнений других полей, в частности, напри-

мер, электромагнитного. Уравнения полей в плоском пространстве с учетом поля скоростей и гравитационного потенциала получаются из уравнений в свободном пространстве заменой частной производной по времени на инвариантную, определяемую полем скоростей, и учетом вызванного гравитационным потенциалом замедления местного времени. Эти эффекты определяются четырехмерной метрикой в “местном времени” – малыми добавками к метрике Минковского (при выборе  $c = 1$ ), линейной по потенциалу  $\phi$  и квадратичной по полю скоростей:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 + 2\phi - V^2 & V_x & V_y & V_z \\ V_x & -1 + 2\phi & & \\ V_y & & -1 + 2\phi & \\ V_z & & & -1 + 2\phi \end{pmatrix}.$$

Здесь  $V^2 \equiv V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ .

Обратный метрический тензор

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 - 2\phi & V_x & V_y & V_z \\ V_x & V_x^2 - 1 - 2\phi & V_x V_y & V_x V_z \\ V_y & V_x V_y & V_y^2 - 1 - 2\phi & V_y V_z \\ V_z & V_x V_z & V_y V_z & V_z^2 - 1 - 2\phi \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

Уравнения полей записываются в общековариантном виде в соответствии с техникой ковариантного дифференцирования лишь с учетом малости соответствующих добавок.

### 7.10.1. Распространение света

Например, распространение света описывается уравнением эйконала

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} = 0,$$

которое после подстановки  $\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega$ ,  $\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{k}$  в метрике (7.41) приобретает вид

$$(1 - 2\phi)(\omega - (\mathbf{V} \mathbf{k}))^2 = (1 + 2\phi) \mathbf{k}^2. \quad (7.42)$$

Отсюда выражается частота  $\omega$ :

$$\omega = (1 + 2\phi) \sqrt{\mathbf{k}^2} + (\mathbf{V} \mathbf{k}), \quad (7.43)$$

определяющая групповую скорость света

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = (1 + 2\phi) \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{V}.$$

В достаточно сильных полях Лензе–Тирринга лучи “закручиваются”, так что возникает эффект “космического линзирования”.

Опишем ставшую уже классической задачу распространения светового луча вблизи Солнца с массой  $M$ , создающего гравитационный потенциал  $\phi = -\kappa M/r$ . В уравнении эйконала (7.42) отсутствует поле скоростей. Выбрав полярные координаты, распишем это уравнение:

$$(1 + 4 \frac{\kappa M}{r}) \omega^2 = k_r^2 + \frac{k_\varphi^2}{r^2}. \quad (7.44)$$

Так как коэффициенты уравнения не зависят от времени, то на луче  $\omega = \text{const}$ , и обозначив  $k_r/\omega = n$ ,  $k_\varphi/\omega = l$ , выразим зависимость  $n(l)$ :

$$n = \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa M}{r} - \frac{l^2}{r^2}}.$$

Определяющая траекторию зависимость  $r(\varphi)$  находится из уравнения

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\partial n}{\partial l} = \frac{-\frac{l}{r^2}}{\sqrt{1 + 4 \frac{\kappa M}{r} - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (7.45)$$

Переменные разделяются

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1 + 4\alpha x - x^2}} \approx \frac{dx}{\sqrt{1 - (x - 2\alpha)^2}}; \quad x \equiv \frac{l}{r}; \quad \alpha \equiv \frac{\kappa M}{l}.$$

Отсюда

$$x = \frac{l}{r} = \sin \varphi + 2\alpha.$$

Луч идет из бесконечности и уходит на бесконечность, где  $x = 0$ , что соответствует начальному и конечному углам, удовлетворяющим соотношению

$$\sin \varphi + 2\alpha = 0; \quad \varphi_1 = -2\alpha, \quad \varphi_2 = \pi + 2\alpha; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 4\frac{\kappa M}{l}$$

в хорошем соответствии с наблюдениями экспедиции Эддингтона в 1919 году и выражением, полученным в ОТО [13].

### 7.10.2. Электромагнитное поле

При слабых полях влияние гравитационного потенциала и поля скоростей можно рассматривать отдельно. Сначала рассмотрим модификацию уравнений Максвелла в поле скоростей  $\mathbf{V}$  (без предположения их малости).

Напряженности образуют четырехмерный тензор

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.46)$$

Лагранжиан электромагнитного поля

$$L = \frac{(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu}) F_{\alpha\nu} F_{\beta\mu}}{16\pi} \sqrt{-g} \quad (7.47)$$

при метрическом тензоре (7.41) с  $\phi = 0$

$$L = \frac{(\mathbf{E} - [\mathbf{V} \times \mathbf{B}])^2 - \mathbf{B}^2}{8\pi}$$

приводит к модифицированным полям индукции в вакууме

$$\mathbf{D} = 4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{E} - [\mathbf{V} \times \mathbf{B}];$$

$$\mathbf{H} = -4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} = \mathbf{B} - [\mathbf{V} \times \mathbf{D}]$$

и уравнениям Максвелла в традиционном виде, не включающем поле скоростей  $\mathbf{V}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_e; & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Без поля скоростей, но с гравитационным потенциалом  $\phi$  лагранжиан

$$L = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 - 2\phi(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)}{8\pi} \quad (7.49)$$

приводит к выражениям

$$\mathbf{D} = (1 - 2\phi) \mathbf{E}; \quad \mathbf{H} = (1 + 2\phi) \mathbf{B}.$$

Лагранжиан также определяет электромагнитное поле как источник гравитационных полей в уравнениях (7.8)–(7.11). Вектор Умова–Пойнтинга электромагнитного поля является источником поля Лензе–Тирринга, а плотность электромагнитной энергии – источником гравитационного потенциала:

$$\epsilon = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi c^2}; \quad \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi c^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (7.50)$$

Учет поля Лензе–Тирринга необходим при расчете магнитных полей массивных карликов и в тонких экспериментах с вращающимися сверхпроводниками [48].

## 7.11. Заключение

Система уравнений (7.8)–(7.11) вместе с определяющим динамикоматериальной точки гамильтонианом (7.5), а также уравнениями динамики других полей с учетом поля скоростей и гравитационного потенциала образуют замкнутую систему уравнений космической динамики.



# Глава 8

## Вспышки сверхновых и вращение

Показано, что коллапс вращающейся звезды с большим моментом количества движения (параметр Керра  $a > M$ ) с неизбежностью приводит к взрыву. При больших моментах взрыв наступает значительно раньше, чем коллапсирующая звезда достигнет своего горизонта, и при размерах, значительно больших ее гравитационного радиуса.

### 8.1. Введение

Вспышки сверхновых звезд обычно объясняются ядерными превращениями при сильном гравитационном сжатии звезды. Анализ наблюдений за вспышками сверхновых приводит к выводу: “По-видимому, вспышка сверхновой связана с существенным преобразованием природы звезды”, – [49, с. 40]. Но что это за преобразование, каков спусковой механизм этого процесса? Определенный свет на данную проблему проливает факт, что сверхновые II типа наблюдаются *только в спиральных галактиках* (см. [50, с. 604]). Видимо, существенную роль играют процессы *вращения*. В предлагаемой главе будет изучен один совершенно естественный механизм “существенного преобразования природы звезды”, связанный с вращением.

В общей теории относительности (ОТО) имеется точное стационарное решение уравнений Эйнштейна вне вращающегося объекта – решение Керра, являющееся в определенном смыс-

ле вершиной достижений ОТО. Однако математическая сложность наряду с математическим изяществом решения сделали его неприкосновенной собственностью математиков и математически утонченных физиков-теоретиков. Этому решению посвящен, например, целиком второй том монографии Субрахманьяна Чандрасекара [22]. Во Введении Чандрасекар приводит цитату из Ландау и Лифшица [13]: “В литературе нет конструктивного аналитического вывода метрики [Керра], адекватного его физическому смыслу. . .”, и в опровержение этого утверждения дает математически строгую цепочку вычислений, приводящих к метрике Керра (на 17-и страницах). Ясно, что астрофизики из этого решения могут брать лишь конечные результаты и выводы.

Роковую роль в астрофизической судьбе решения Керра сыграло исключительно глубокое исследование Картера [51] топологической структуры метрики Керра, в котором он показал, что при параметре Керра  $a$ , большем, чем гравитационный радиус, в окрестности сингулярности возникают нефизические особенности временной части метрики. Мода на установление “принципов природы” привела к заключению: “Потеря смысла метрикой Керра при  $a > r_g/2$  означает, что значение  $a_{max} = r_g/2$ ,  $M_{max} = m r_g/2$  дает верхнюю границу возможных значений момента коллапсара.” После установления этого “принципа природы” ограничение метрики Керра малыми моментами стало как бы очевидной истиной: “Подчеркнем, что все рассмотренные выше свойства пространства–времени черной дыры справедливы только, если  $M \geq |a|$ . В противном случае в решении исчезает горизонт и оно уже не описывает черную дыру. Появляются “патологические” особенности [Хокинг, Эллис (1973)], и вряд ли это решение может иметь какое-либо отношение к реальности.” [52, с. 63].

Но если звезда образовалась путем гравитационного сжатия облака пыли, масса этой пыли и ее момент количества движения не связаны никакими математическими ограничениями –

они определяются начальными условиями. Момент количества движения вполне может оказаться больше критической величины, определяемой условием  $a = r_g/2$ :

$$L_{cr} = \frac{\kappa M^2}{c}. \quad (8.1)$$

Здесь  $\kappa$  – гравитационная постоянная, а  $M$  – масса звезды. Посмотрим, что значит это ограничение. Для оценки можно принять звезду в виде однородного шара массы  $M$  и радиуса  $R$ , тогда ее момент инерции равен  $J = 0.4 M R^2$ . Приравнявая момент количества движения  $L = J\omega$  его “максимально допустимому значению” (8.1), можно найти предельную угловую скорость вращения:

$$\frac{2}{5} M R^2 \omega_{max} = \frac{\kappa M^2}{c}; \quad \omega_{max} = \frac{5 \kappa M}{2 R^2 c} = \frac{5 g}{2 c}, \quad (8.2)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения на поверхности звезды. В частности, для Земли эта “максимальная угловая скорость вращения”  $\omega_{max} = 50/(6 \cdot 10^8) \approx 10^{-7} \text{с}^{-1}$  определяет “минимально допустимый период вращения Земли вокруг своей оси”  $T \approx 2 \cdot 10^4$  часа, или 873 суток, или 2.4 года. Если Земля будет вращаться быстрее (что она и делает), то будет нарушен принцип предельно допустимого момента. И Луна нарушает установленные пределы. Скорее всего, трудно найти небесный объект, вращающийся с угловой скоростью, меньшей “предельно допустимой”.

Звезды, имеющие момент количества движения больше предельного, определяемого выражением (8.1), для краткости будем называть *ротарами*, в отличие от медленно вращающихся *слитаров*.

В метрике Шварцшильда два параметра: гравитационный и геометрический радиусы, а в решении Керра таких параметров три: масса  $M$ , параметр вращения  $a$  и гравитационный потенциал на поверхности звезды, определяющий ее внешний геометрический контур.

Шварцшильдовы и медленно вращающиеся звезды (*слип-ры*,  $a \leq M$ ), если их масса велика, по современным представлениям должны коллапсировать достаточно спокойно: материя асимптотически приближается к *эргосфере*.

Поведение ротаров принципиально другое. Пока теоретические сингулярности находятся далеко под поверхностью объекта, никаких заметных проявлений это нарушение не вызывает. Однако, если ротар неограниченно коллапсирует, то еще до ухода материи под горизонт наступает *топологический фазовый переход*: внешняя фигура звезды из топологически подобной сфере переходит в топологически подобную тору, причем не постепенным уменьшением размера вдоль оси вращения до нуля с постепенным превращением в тор, а при конечной толщине вращающегося диска. При этом обнажается сингулярность. Такой переход, без сомнения, является упомянутым выше “существенным преобразованием природы звезды”, который не может происходить без взрывов.

## 8.2. Изоэнтропный газ в сопутствующей системе

Полагая вещество коллапсирующей звезды изоэнтропным, найдем условие, определяющее форму ее поверхности. В изоэнтропной жидкости давление, плотность энергии и другие термодинамические потенциалы однозначно функционально связаны друг с другом. Эти соотношения достаточно подробно рассмотрены еще Толменом [59]. Для дальнейшего важно соотношение между давлением  $p$ , энтальпией  $h$ , плотностью вещества  $\rho$  и плотностью энергии  $\epsilon$ :

$$dp = \rho dh; \quad d\epsilon = h d\rho; \quad \epsilon + p = \rho h. \quad (8.3)$$

Тензор энергии–импульса идеальной жидкости может быть представлен в виде

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\epsilon + p) u^{\alpha} u_{\beta} - p \delta_{\beta}^{\alpha} = (\rho u^{\alpha}) (h u_{\beta}) - p \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (8.4)$$

Закон сохранения количества вещества

$$\nabla_{\alpha}(\rho u^{\alpha}) = 0 \quad (8.5)$$

из четырех уравнений равенства нулю дивергенции тензора энергии–импульса

$$\nabla_{\alpha} T_{\beta}^{\alpha} = \rho u^{\alpha} \nabla_{\alpha}(h u_{\beta}) - \rho h_{,\beta} = 0$$

оставляет только три независимых (четвертым является он сам):

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} u_{\beta} + (u^{\alpha} u_{\beta} - \delta_{\beta}^{\alpha}) \frac{h_{,\alpha}}{h} = 0. \quad (8.6)$$

Свертка этих соотношений с  $u^{\beta}$  тождественно равна нулю.

В сопутствующей системе частицы относительно себя не перемещаются, и отлична от нуля только компонента четырех–скорости  $u^0$ , а компоненты  $u^i$  равны нулю (латинскими индексами мы отмечаем пространственные компоненты). Если, кроме того, система стационарна – производные по времени от всех переменных равны нулю, – то уравнения (8.6) принимают стационарный вид:

$$u^0 \nabla_0 u_j = \frac{h_{,j}}{h}. \quad (8.7)$$

Так как производные по времени равны нулю, слева оказывается лишь добавка в ковариантную производную от связностей, и, так как  $g_{00}(u^0)^2 = 1$ ,  $u_{\alpha} = g_{\alpha 0} u^0$ , откуда  $g^{0\alpha} u_{\alpha} = u^0$ :

$$-u^0 \Gamma_{0j}^{\alpha} u_{\alpha} = -u^0 \Gamma_{00j} g^{0\alpha} u_{\alpha} = -\frac{g_{00,j}}{2g_{00}} = \frac{h_{,j}}{h}. \quad (8.8)$$

Отсюда следует основное соотношение гидростатики идеальной изоэнтропной жидкости в сопутствующей системе:

$$h = \frac{\text{const}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (8.9)$$

Все термодинамические величины, однозначно определяемые энтальпией  $h$ , выражаются через компоненту метрики  $g_{00}$  (с нижними индексами). В частности, с этой компонентой метрики связано давление, и на поверхности звезды, определяемой равенством нулю давления, компонента  $g_{00}$  должна быть постоянной.

### 8.3. Горизонты ротаров

*Керрова модель* вращающейся звезды определяется гравитационным радиусом  $r_g$  и параметром вращения  $a$ . Оба эти параметра имеют размерность длины, так что их отношение  $\Omega = 2a/r_g = Lc/(\kappa M^2)$  – *быстрота вращения* – безразмерна. Значение  $\Omega = 1$  отделяет *слипарты* ( $\Omega < 1$ ) от *ротаров* ( $\Omega > 1$ ).

Третьим параметром является гравитационный потенциал  $\phi_0$  на поверхности звезды, через который выражается безразмерный *параметр*  $\chi = -2\phi/c^2$ :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \chi.$$

Он определяет внешнюю геометрию звезды. Значение  $\chi = 1$  дает *теоретический горизонт* звезды. Если  $\chi \ll 1$ , то теоретический горизонт реально отсутствует: под внешней границей звезды находится вещество, и характер решения существенно отличается от вакуумного. Момент инерции звезды с экваториальным радиусом  $R$   $J = \sigma M R^2$ . Для однородного шара  $\sigma = 2/5$ , так что для приблизительно сферической звезды быстрота вращения выражается через ускорение свободного падения на ее поверхности  $g = \kappa M/R^2$  и период вращения вокруг собственной оси  $T$ :

$$\Omega = \frac{a}{r_g/2} = \frac{\sigma M R^2 c \omega}{\kappa M^2} = \sigma c \omega \frac{R^2}{\kappa M} = 2\pi \sigma \frac{c}{gT}.$$

Мы уже показали, что Земля является быстрым ротаром.

Приведем значения безразмерного параметра  $\Omega$  для Солнца и некоторых планет Солнечной системы:

	$\sigma$	$g$ , м с <sup>-2</sup>	$T$ , час.	$\Omega$
Солнце	0.4	275	6000	1.27
Венера	0.332	8.87	243 сут.	3.36
Меркурий	0.324	3.7	1411	32.5
Луна	0.4	1.62	27.3	197
Юпитер	0.2	25	9 ч. 50 мин.	426
Земля	0.332	9.81	24	738
<b>Сатурн</b>	0.22	11	10 ч. 14 мин.	<b>1023</b>

Здесь для Луны и Солнца взято значение  $\sigma = 0.4$  – как для однородного шара. Если для Солнца  $\sigma = 0.315$ , то оно окажется как раз на границе слипаров и ротаров. Если же  $\sigma \sim 0.2$ , как у Юпитера или Сатурна, то Солнце оказывается слипаром. Все же планеты, а также Луна, являются ярко выраженными ротарами. Выделяется значение  $\Omega = 1023$  у Сатурна, у которого и наблюдаются наиболее эффектные проявления вращения.

Метрика Керра при нулевой массе (параметр  $r_g = 0$ , но  $a \neq 0$ ) описывает плоское пространство в сфероидальных координатах (см. [13]). Размер сингулярной области определяется параметром  $a$ , и кривизна пропорциональна  $r_g/a^3$ , то есть мала при малом отношении  $r_g/a$ , так что несмотря на сложность формул, метрика Керра может описывать ротары в почти плоском пространстве в сфероидальных координатах, связывающих координаты Бойера–Линдквиста с декартовыми координатами в трехмерном евклидовом пространстве следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2 + r^2} \sin \vartheta \cos \varphi; & y &= \sqrt{a^2 + r^2} \sin \vartheta \sin \varphi; \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (8.10)$$

У слипаров выделяют две характерные поверхности – горизонт, определяемый соотношением

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} = 0, \quad (8.11)$$

и *эргосферу*, определяемую соотношением

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2 = 0. \quad (8.12)$$

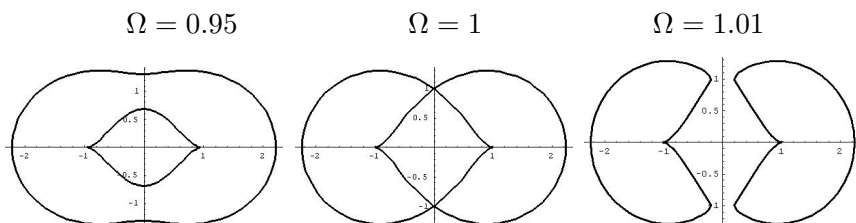
Последнее уравнение имеет вещественные решения лишь при  $\Omega \leq 1$ , так что для ротаров эргосфера отсутствует и остается лишь одна характерная поверхность – горизонт, уравнение которого следует из (8.11):

$$r^2 - r_g r + a^2 \cos^2 \vartheta = 0. \quad (8.13)$$

Это квадратное относительно  $r$  уравнение имеет два решения ( $\mu = r_g/2$ ):

$$r_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} = \mu \left( 1 \pm \sqrt{1 - \Omega^2 \cos^2 \vartheta} \right).$$

Проследим, как меняется горизонт при  $a \approx \mu$  (цифры на осях показывают отношение радиуса к  $\mu$ ):



Критическая поверхность (при  $\Omega = 1$ ) отсекает по оси  $z$  отрезки размера  $a = \mu$ .

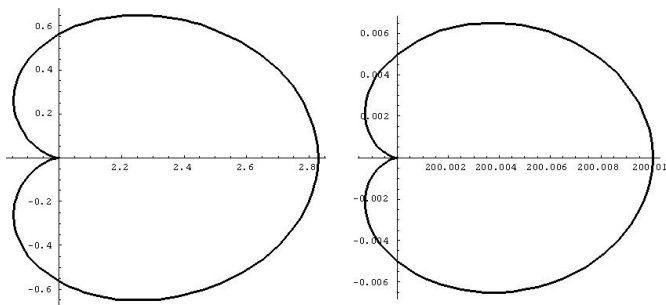
При  $\Omega > 1$  геометрическая особенность  $r = 0$ ,  $\vartheta = \pi/2$  [51] оказывается открытой и отстоит от оси вращения на расстояние  $a$ .



Приведем вид горизонта для больших  $\Omega$ :

$$\Omega = 2$$

$$\Omega = 200$$



## 8.4. Коллапс ротаров

В великолепном обзоре Руффини [53] записаны уравнения движения пробных частиц (не изменяющих массу и момент количества движения звезды). Они не содержат каких-либо видимых особенностей, которые можно было бы трактовать как взрыв. Более того, описание динамики коллапса пылевидной материи, образующей массу и момент количества движения вращающейся звезды, приведено в [54]. Эти решения также представлены некоторыми интегралами. Но чтобы выявить “существенное преобразование природы звезды”, нужно следить не за отдельными пылинками, а за облаком в целом. В сферически симметричном варианте коллапса уменьшается внешний радиус звезды, при этом во всех точках поверхности одинаково уменьшается гравитационный потенциал. При коллапсе вращающейся звезды последовательность поверхностей  $\phi = \text{const}$  ( $\chi = \text{const}$ ) в определенной степени отображает коллапс ротара. Эти поверхности находятся из выражения для компоненты  $g_{00}$  метрики Керра:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \equiv 1 - \chi = 1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}.$$

Как и для горизонта, это квадратное уравнение относительно радиуса:

$$r^2 - \frac{2\mu}{\chi} r + a^2 \cos^2 \vartheta = 0.$$

Оно совпадает с уравнением горизонта (8.13), если в последнем заменить  $\mu$  на  $\mu/\chi$ . В частности, топологический переход совершается при потенциале

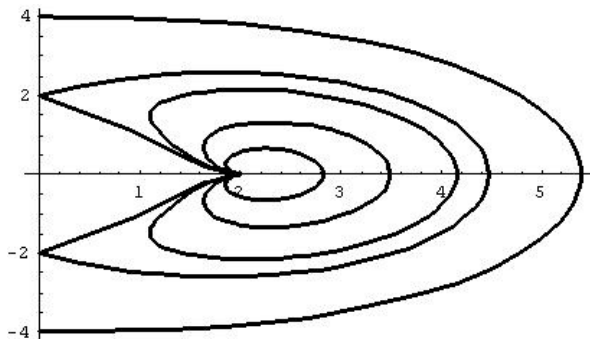
$$\frac{\mu}{\chi_c} = a; \quad \chi_c = \frac{\mu}{a} = \frac{1}{\Omega}. \quad (8.14)$$

Это очень важное соотношение: если при сферически симметричном коллапсе особенности достигаются при  $\chi = 1$ , то для ротаров топологическая особенность достигается при значительно меньших значениях:  $\chi = \chi_c = 1/\Omega$ . Размер критической поверхности вдоль оси  $z$  для  $\Omega = 1$  равен  $\mu$ , определяется массой, а для ротаров этот размер равен параметру вращения  $a$ , который может быть во много раз больше гравитационного радиуса.

Построим серию эквипотенциальных поверхностей

$$r_{1,2} = \frac{\mu}{\chi} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\chi^2} - a^2 \cos^2 \vartheta}$$

с  $\chi = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$  для ротара с  $\Omega = 2$ :



На ранней стадии коллапса форма ротара близка к сферической, однако по мере приближения к критическому потенциалу

$\chi_c = 1/\Omega$  она становится более сплюснутой. После прохождения критического потенциала происходит резкое изменение геометрии звезды: она при конечном размере вдоль оси  $z$  ( $\Delta z = 2a$ ) принимает тороидальную форму, при этом обнажается сингулярность. По-видимому, этот переход для сколь-нибудь реалистичной модели вещества звезды не может проходить квазистатически, а приводит к взрыву. Внутренний контур на рисунке отображает горизонт  $\chi = 1$ . Переход наступает задолго до горизонта, особенно у ротаров с большим  $\Omega$ .

## 8.5. Пространственная метрика

До сих пор мы занимались только компонентой  $g_{00}$  метрики Керра. Однако картины горизонтов или эквипотенциальных поверхностей зависят от пространственной метрики, и здесь мы сталкиваемся с принципиальными вопросами.

Ранее была показана необходимость приведения пространственно-временных картин к глобальному времени ( $g^{00} = 1$ ). Например, метрика Шварцшильда была приведена к глобальному времени Пэнлеве (см. стр. 36).

В [6] выполнено приведение метрики Керра к глобальному времени решением уравнения (2.2). В координатах Бойера–Линдквиста в принятых обозначениях

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta; \quad \Delta = r^2 - r_g r + a^2;$$

$$W = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \vartheta$$

приведение к *глобальному времени* выполняется заменой временной переменной в метрике Керра  $t_K = t + U(r)$ , где

$$\frac{dU(r)}{dr} = u(r) = \frac{\sqrt{r_g r (r^2 + a^2)}}{\Delta}.$$

Подстановка  $dt_K = dt + u dr$  не меняет компоненты  $g_{00}$ , но

$$g^{00} = 1; \quad g^{0r} = \frac{\sqrt{r_g r (r^2 + a^2)}}{\rho^2}; \quad g^{0\varphi} = -\frac{r_g a r}{W}.$$

Метрика пространственного сечения  $t = \text{const}$  приводится к виду

$$\begin{aligned} \gamma_{\vartheta\vartheta} &= \rho^2; & \gamma_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} + \frac{r_g r (r^2 + a^2)(r_g r - \rho^2)}{\rho^2 \Delta^2}; \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{\sqrt{r_g r (r^2 + a^2)} r_g a r}{\rho^2 \Delta} \sin^2 \vartheta; \\ \gamma_{\varphi\varphi} &= \left( r^2 + a^2 + \frac{r_g r}{\rho^2} a^2 \sin^2 \vartheta \right) \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Если положить  $a^2 = 0$ , то  $\rho \rightarrow r$ ,  $\Delta \rightarrow r^2 - r_g r$ , и метрика переходит в уже упоминавшуюся (4.21) с евклидовым пространственным сечением.

Геометрия построенных в предыдущих разделах поверхностей горизонта и равного потенциала определяется метрикой (8.15). Мы проследим лишь за двумя параметрами этих поверхностей: вдоль оси  $z$  ( $\vartheta = 0$ ,  $dl = g^{(z)} dr$ ) и вдоль экваториального радиуса ( $\vartheta = \pm\pi/2$ ,  $dl = g^{(r)} dr$ ), где (в масштабе  $a = 1$ )

$$\begin{aligned} g^{(z)} &= \sqrt{g_{rr}|_{\vartheta=0}} = 1; \\ g^{(r)} &= \sqrt{g_{rr}|_{\vartheta=\pi/2}} = \frac{\sqrt{(1+r^2)(r^2+r_g^2) - r_g r (1+2r^2)}}{1 - r_g r + r^2}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Расстояние по оси  $z$  не искажается. В частности, при критическом потенциале топологического фазового перехода толщина диска вдоль оси  $z$  равна  $2a$ .

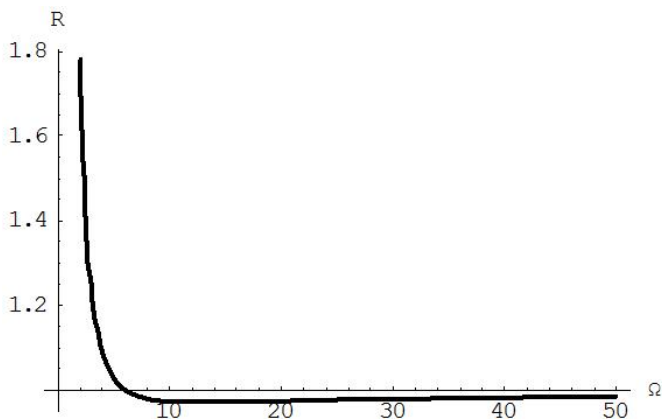
При расчете расстояний вдоль экваториального радиуса масштабный множитель  $g^{(r)}$  не равен единице. Расстояние от оси вращения до сингулярности  $R$  определяется интегралом по радиальной переменной при  $\vartheta = \pi/2$ :

$$R = \int_0^{\sqrt{3}} g^{(r)} dr.$$

Вычислим сначала это расстояние при  $r_g = 0$  – в евклидовом пространстве в сфероидальной системе координат (8.10). Здесь

$$g^{(r)} = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}; \quad R = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r \, dr}{\sqrt{1+r^2}} = \sqrt{1+r^2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{4} - 1 = 1.$$

Отсюда и определяется верхний предел интеграла  $R$ . Для ненулевых масс этот интеграл как функция быстроты вращения  $\Omega$  представлен на графике:



Из графика видно, что уже при  $\Omega > 5..10$  расчеты мало отличаются от расчетов в плоском пространстве, т.е. в динамике быстрых ротаров кривизна пространства играет малую роль.

Итак, при больших вращательных моментах коллапсирующей звезды взрыв наступает значительно раньше, чем ее поверхность достигнет горизонта, и при размерах, значительно больших ее гравитационного радиуса.

## Глава 9

# Вращение релятивистской жидкости

*Из уравнений Эйнштейна общей теории относительности выведена система уравнений для равновесной конфигурации вращающейся звезды из идеальной жидкости. Как и в нерелятивистской задаче, давление зависит от гравитационного потенциала, включающего и центробежный потенциал. Исследованы граничные условия в центре и на бесконечности. Выведены условия сшивания внутреннего решения с внешним, в частности, с метрикой Керра. При приближении поверхности вращающейся коллапсирующей звезды к горизонту, где скорость света стремится к нулю, вращение носит принципиально релятивистский характер и источники неограниченно возрастают. Уравнения равновесия могут быть выведены из принципа минимума энергии. Прослежен переход к нерелятивистским задачам.*

### 9.1. Введение

Вращение является одним из важнейших свойств космических объектов. Около 50% галактик являются спиральными, вращаются вокруг своих осей звезды и планеты. Громадный прогресс в описании вращающихся космических тел был достигнут в 1963 году, когда Рой Патрик Керр [55] нашел точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме, описывающее внешность вращающейся звезды. Лишь через 20 лет Субрахманьян

Чандрасекар [22] дал последовательный вывод этого решения уравнений Эйнштейна.

Если для звезды без вращения внутреннее и внешнее решения были найдены К. Шварцшильдом в 1915 году, сразу же после создания общей теории относительности, то для метрики и распределения материи внутри вращающейся звезды до сих пор отсутствует не только аналитическое решение для какого-либо вида материи, но и система самосогласованных уравнений, решение которых дало хотя бы численные результаты [56]. Поэтому пока при исследовании вращающихся звезд в общей теории относительности приходится довольствоваться первым приближением по скорости вращения, разработанным в 1968 году Хартлем и Торном [57].

Наблюдатели имеют дело лишь с внешностью звезд, видимо, определяемой метрикой Керра, но поверхность звезды зависит от условий сшивания внутреннего решения с внешним. Такие условия до сих пор не были выведены [58], точнее, выведены лишь в предыдущей главе: на поверхности равновесной звезды компонента метрики  $g_{00}$  постоянна.

## 9.2. Уравнения равновесия внутри звезды

В сопутствующей системе координат метрика определяется четырьмя неопределенными функциями двух переменных  $\nu(r, \vartheta)$ ,  $\mu(r, \vartheta)$ ,  $\lambda(r, \vartheta)$ ,  $\Omega(r, \vartheta)$ :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e^{2\nu} - q^2 e^{2\lambda - 2\nu} r^2 \Omega^2 \sin^2 \vartheta & 0 & 0 & q e^{2\lambda - 2\nu} r^2 \Omega \sin^2 \vartheta \\ 0 & -e^{2\mu - 2\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2\mu - 2\nu} r^2 & 0 \\ q e^{2\lambda - 2\nu} r^2 \Omega \sin^2 \vartheta & 0 & 0 & -e^{2\lambda - 2\nu} r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Корень из детерминанта этой метрики не зависит от  $\Omega$ :

$$\sqrt{-g} = e^{2\mu + \lambda - 2\nu} r^2 \sin \vartheta.$$

Параметр  $q$  введен для анализа разложения по степеням  $\Omega$ . В точных формулах он полагается равным единице.

Тензор энергии–импульса в этой метрике представляется так:

$$(T_j^i) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & \frac{-(\epsilon+p)K\Omega}{1-K\Omega^2} \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}; \quad K = q^2 r^2 \sin^2 \vartheta e^{2\lambda-4\nu}. \quad (9.2)$$

Исключительно важную роль играют тождества Гильберта  $\nabla_i T_j^i = 0$ , подставив в которые связности, вычисленные через метрику (9.1), для тензора (9.2) получаем два уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\epsilon + p}{2} \frac{\partial \ln g_{00}}{\partial r}; \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -\frac{\epsilon + p}{2} \frac{\partial \ln g_{00}}{\partial \vartheta}. \quad (9.3)$$

Это значит, что если представить компоненту метрики как  $g_{00} = 1 + 2\phi/c^2$ , то поверхности постоянного давления (изобары) – это поверхности постоянного гравитационного потенциала  $\phi$ . В частности, на границе тела  $p = 0$ , поэтому уравнение границы тела определяется условием  $\phi = \text{const}$ , как это было показано выше для общего случая.

В этой главе мы используем систему единиц  $8\pi\kappa/c^4 = 1$ , в которой уравнения Эйнштейна записываются как  $G_j^i = T_j^i$ .

Если взять произвольные функции  $\nu(r, \vartheta)$ ,  $\mu(r, \vartheta)$ ,  $\lambda(r, \vartheta)$ ,  $\Omega(r, \vartheta)$ , то тензор Эйнштейна имеет нетривиальные компоненты (нужно рассматривать лишь компоненты с  $i \leq j$  из-за симметрии  $G^{ij}$ ):

$$G_0^0; G_1^1; G_2^2; G_3^3; G_2^1; G_3^0.$$

Для того, чтобы метрические функции описывали вращающуюся звезду из идеальной жидкости с тензором энергии–импульса (9.2), на них должно быть наложено четыре условия:

$$Z_1 = G_1^2 = 0; \quad Z_2 = G_1^1 - G_2^2 = 0; \quad Z_3 = G_1^1 - G_3^3 = 0;$$



$$G_3^0 = -\frac{(\epsilon + p) K \Omega}{1 - K \Omega^2}. \quad (9.4)$$

Последнее уравнение является дифференциальным уравнением для  $\Omega(r, \vartheta)$ :

$$\begin{aligned} \Omega_{rr} + \left(\frac{4}{r} + 3\lambda_r - 4\nu_r\right)\Omega_r + \frac{\Omega_{\vartheta\vartheta} + (3\operatorname{ctg}\vartheta + 3\lambda_\vartheta - 4\nu_\vartheta)\Omega_\vartheta}{r^2} = \\ = \frac{2e^{2\mu-2\nu}(\epsilon + p)\Omega}{1 - e^{2\lambda-4\nu}q^2\Omega^2r^2\sin^2\vartheta}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

При подстановке в  $G_0^0 - G_1^1 - G_2^2 - G_3^3 = \epsilon + 3p$  второй производной  $\Omega_{rr}$ , найденной из (9.5), в полученное выражение из вторых производных входят только  $\nu_{rr}$  и  $\nu_{\vartheta\vartheta}$ :

$$\begin{aligned} \nu_{rr} + \frac{2}{r}\nu_r + \lambda_r\nu_r + \frac{\nu_{\vartheta\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta\nu_\vartheta + \lambda_\vartheta\nu_\vartheta}{r^2} = e^{2\mu-2\nu}\frac{\epsilon + 3p}{2} + \\ + \frac{e^{2\mu+2\lambda-6\nu}(\epsilon + p)q^2\Omega^2r^2\sin^2\vartheta}{1 - e^{2\lambda-4\nu}q^2\Omega^2r^2\sin^2\vartheta} + \frac{1}{2}e^{2\lambda-4\nu}q^2\sin^2\vartheta(r^2\Omega_r^2 + \Omega_\vartheta^2). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Из уравнения  $G_3^3 = -p$  определяется дифференциальное уравнение для  $\mu(r, \vartheta)$ :

$$\begin{aligned} \mu_{rr} + \frac{\mu_r}{r} + \nu_r^2 + \frac{\mu_{\vartheta\vartheta} + \nu_\vartheta^2}{r^2} = p e^{2\mu-2\nu} + \\ + e^{2\mu+2\lambda-6\nu}\frac{(\epsilon + p)q^2\Omega^2r^2\sin^2\vartheta}{1 - e^{2\lambda-4\nu}q^2\Omega^2r^2\sin^2\vartheta} + \frac{3}{4}e^{2\lambda-4\nu}q^2\sin^2\vartheta(r^2\Omega_r^2 + \Omega_\vartheta^2). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Сумма

$$\begin{aligned} -(G_1^1 + G_2^2)e^{2\mu-2\nu} = \\ = \lambda_{rr} + \frac{3\lambda_r}{r} + \lambda_r^2 + \frac{1}{r^2}(\lambda_{\vartheta\vartheta} + 2\operatorname{ctg}\vartheta\lambda_\vartheta + \lambda_\vartheta^2) = 2p e^{2\mu-2\nu} \end{aligned} \quad (9.8)$$

дает дифференциальное уравнение для  $\lambda(r, \vartheta)$ . Однако имеются еще два тождества  $G_1^1 = G_3^3$  и  $G_3^2 = 0$ , которые позволяют определить все вторые производные  $\lambda(r, \vartheta)$ :

$$\lambda_{\vartheta\vartheta} = -\lambda_\vartheta^2 - 2\operatorname{ctg}\vartheta\lambda_\vartheta - r\lambda_r - r\mu_r + \mu_\vartheta\lambda_\vartheta - r^2\mu_r\lambda_r + \operatorname{ctg}\vartheta\mu_\vartheta +$$

$$+r^2 \nu_r^2 - \nu_\vartheta^2 + r^2 p e^{2\mu-2\nu} - \frac{1}{4} e^{2\lambda-4\nu} q^2 r^2 \sin^2 \vartheta (r^2 \Omega_r^2 - \Omega_\vartheta^2); \quad (9.9)$$

$$\lambda_{rr} = \frac{\mu_r - 2\lambda_r}{r} - \lambda_r^2 - \nu_r^2 + \mu_r \lambda_r + \frac{1}{r^2} (\nu_\vartheta^2 - \lambda_\vartheta \mu_\vartheta - \text{ctg}\vartheta \mu_\vartheta) + \\ + p e^{2\mu-2\nu} + \frac{1}{4} e^{2\lambda-4\nu} q^2 r^2 \sin^2 \vartheta (r^2 \Omega_r^2 - \Omega_\vartheta^2); \quad (9.10)$$

$$\lambda_{r\vartheta} = (\text{ctg}\vartheta + \lambda_\vartheta) (\mu_r - \lambda_r) + \\ + \mu_\vartheta \left( \frac{1}{r} + \lambda_r \right) - 2\nu_r \nu_\vartheta + \frac{1}{2} e^{2\lambda-4\nu} q^2 r^2 \sin^2 \vartheta \Omega_r \Omega_\vartheta. \quad (9.11)$$

Согласованность вторых производных  $\lambda_{rr}$ ,  $\lambda_{r\vartheta}$ ,  $\lambda_{\vartheta\vartheta}$  гарантируется тождествами Гильберта. Оно выражается в перестановочности частных производных:

$$z_1 = \partial_\vartheta(\lambda_{rr}) - \partial_r(\lambda_{r\vartheta});$$

$$z_2 = \partial_\vartheta(\lambda_{r\vartheta}) - \partial_r(\lambda_{\vartheta\vartheta}).$$

Выражения  $z_1$  и  $z_2$  обращаются в нуль при выполнении соотношений (9.3).

### 9.3. Граничные условия

В римановом пространстве бесконечно малая окрестность любой точки имеет евклидову геометрию. В частности, в окрестности центра пространственная метрика может быть представлена как метрика Минковского с малыми поправками, уравнения Эйнштейна по которым линейны. В метрике в бесконечно малой окрестности центра

$$ds^2 = e^{2\nu_0} dt^2 - e^{2\mu_0-2\nu_0} (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$$

две константы  $\nu_0$  и  $\mu_0$  могут быть исключены глобальным масштабным преобразованием

$$e^{\nu_0} t = \bar{t}; \quad e^{\mu_0-\nu_0} r = \bar{r}.$$

После решения внутренней задачи значения  $e^\nu$  и  $e^{\mu-\nu}$  на границе при сшивании с внешним решением и определяют масштаб обратного преобразования. Таким образом, в центре можно полагать  $\lambda_0 = \mu_0 = 0$ ,  $\nu_0 = 0$  (то есть решать задачу в переменных  $\bar{t}$ ,  $\bar{r}$ ).

Параметр  $q$  входит в уравнения в сочетании  $qr^2$ , поэтому в центре стремление  $r$  к нулю эквивалентно стремлению  $q$  к нулю, то есть функция  $\Omega$  в окрестности центра не влияет на другие функции метрики. Уравнения вблизи центра линейные:

$$\Omega_{rr} + \frac{4}{r} \Omega_r + \frac{1}{r^2} (3 \operatorname{ctg} \vartheta \Omega_\vartheta + \Omega_{\vartheta\vartheta}) = 2(\epsilon_0 + p_0) \Omega_0; \quad (9.12)$$

$$\nu_{rr} + \frac{2}{r} \nu_r + \frac{1}{r^2} (\operatorname{ctg} \vartheta \nu_\vartheta + \nu_{\vartheta\vartheta}) = \frac{\epsilon_0 + 3p_0}{2}; \quad (9.13)$$

$$\mu_{rr} + \frac{1}{r} \mu_r + \frac{\mu_{\vartheta\vartheta}}{r^2} = p_0; \quad (9.14)$$

$$\lambda_{rr} + \frac{2}{r} \lambda_r = \frac{\mu_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta \mu_\vartheta}{r^2} + p_0; \quad (9.15)$$

$$\lambda_{\vartheta\vartheta} + 2 \operatorname{ctg} \vartheta \lambda_\vartheta + r \lambda_r = \operatorname{ctg} \vartheta \mu_\vartheta - r \mu_r + r^2 p_0; \quad (9.16)$$

$$\lambda_{r\vartheta} + \operatorname{ctg} \vartheta \lambda_r = \operatorname{ctg} \vartheta \mu_r + \frac{1}{r} \mu_\vartheta. \quad (9.17)$$

Это система линейных, неоднородных, почти не связанных уравнений. Ее решение представляется как сумма неоднородного (проще всего – сферически симметричного) решения и суперпозиции однородных решений.

В сферически симметричном решении первые радиальные производные линейны по радиусу:

$$\mu \approx \mu_{rr} \frac{r^2}{2}; \quad \nu \approx \nu_{rr} \frac{r^2}{2}; \quad \lambda \approx \lambda_{rr} \frac{r^2}{2};$$

$$\Omega \approx \Omega_0 + \Omega_{rr} \frac{r^2}{2}; \quad p \approx p_0 + p_{rr} \frac{r^2}{2}.$$

Подстановка этих соотношений в уравнения (9.12)–(9.17) при  $r \rightarrow 0$  приводит к связи параметров вблизи центра:

$$\Omega_{rr} = \frac{2}{5} (\epsilon_0 + p_0) \Omega_0;$$

$$\nu_{rr} = \frac{\epsilon_0 + 3p_0}{6}; \quad \mu_{rr} = \frac{p_0}{2}; \quad \lambda_{rr} = \frac{p_0}{2};$$

$$p_{rr} = -(\epsilon_0 + p_0) \nu_{rr} = -\frac{(\epsilon_0 + p_0)(\epsilon_0 + 3p_0)}{6}.$$

Таким образом, параметрами, определяющими решение, являются  $p_0$ ,  $\Omega_0$  и  $\epsilon_0$ , выраженное через  $p_0$  из уравнения состояния.

К построенному неоднородному решению вблизи центра могут быть добавлены с произвольными коэффициентами мультипольные решения однородных уравнений

$$\Omega_{rr} + \frac{4}{r} \Omega_r + \frac{1}{r^2} (3 \operatorname{ctg} \vartheta \Omega_\vartheta + \Omega_{\vartheta\vartheta}) = 0; \quad (9.18)$$

$$\nu_{rr} + \frac{2}{r} \nu_r + \frac{1}{r^2} (\operatorname{ctg} \vartheta \nu_\vartheta + \nu_{\vartheta\vartheta}) = 0; \quad (9.19)$$

$$\mu_{rr} + \frac{1}{r} \mu_r + \frac{\mu_{\vartheta\vartheta}}{r^2} = 0. \quad (9.20)$$

Их несингулярные решения вблизи центра представляются как

$$\Omega^0(r, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k a_k Q_k(\cos \vartheta).$$

Сферическая часть  $\Omega$  – полиномы Гегенбауэра с  $\alpha = 3/2$  – являются основой сферических функций в пятимерном пространстве. Функция  $\nu$  раскладывается по полиномам Лежандра:

$$\nu^0(r, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k b_k P_k(\cos \vartheta).$$

Наконец,

$$\mu^0(r, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (c_k \cos kx + d_k \sin kx).$$

Однако согласование с  $\lambda$  запрещает мультиполюльные дополнения к  $\mu$ , но на мультиполи  $\Omega$  и  $\nu$  нет никаких ограничений, так что в принципе, кроме  $p_0, \epsilon_0, \Omega_0$ , решение определяется двумя бесконечными сериями констант  $a_k$  и  $b_k$  в центре.

Интегрирование ведется до достижения поверхности, т.е. до  $p = 0$ . На границе жидкости должны быть непрерывны функции  $\Omega, \nu, \mu$  и их нормальные производные.

На бесконечности пространство становится плоским, источники отсутствуют, и поля удовлетворяют уравнениям (9.18), (9.19) также с двумя сериями констант. Это или решение Керра [55], или решения Томимацу и Сато [60], или их некоторая композиция с осесимметричными решениями Вейля.

## 9.4. Сшивание с метрикой Керра

В метрике Керра на поверхности можно ввести константу  $k$ , связанную со значением компоненты  $g_{00}$  на границе:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m\bar{r}}{\bar{r}^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} = 1 - \frac{1}{k}; \quad m = r_g/2.$$

Она определяет уравнение поверхности звезды:

$$\bar{r}^2 + a^2 \cos^2 \vartheta = 2km\bar{r}. \quad (9.21)$$

Это квадратное уравнение относительно  $\bar{r}$ . При  $k > |a|/m$  оно описывает поверхность, топологически эквивалентную сфере с полярным радиусом  $r_p = km + \sqrt{k^2 m^2 - a^2}$  и экваториальным  $r_e = 2km$ . Вторая поверхность лежит внутри первой, но так как внутри первой поверхности находится вещество, метрика

не совпадает с метрикой Керра, и второе решение просто отсутствует. При  $k < |a|/m$  оба решения определяют поверхность, топологически изоморфную тору.

Здесь мы обозначили радиальную переменную  $\bar{r}$ , так как она не обязана совпадать с радиальной переменной внутреннего решения.

Через константу  $k$  выражаются и другие компоненты метрики Керра. На поверхности  $p = 0$ ,  $k = \text{const}$ :

$$g_{03} = \frac{a}{k} \sin^2 \vartheta; \quad g_{33} = - \left( 2 k m \bar{r} + \left( 1 + \frac{1}{k} \right) a^2 \sin^2 \vartheta \right) \sin^2 \vartheta;$$

$$g_{11} = - \frac{2 k m \bar{r}}{\bar{r}^2 + a^2 - 2 m \bar{r}}; \quad g_{22} = -2 k m \bar{r}.$$

Эта метрика должна сшиваться с метрикой внутреннего решения на границе (значение функций которого на границе мы помечаем индексом  $s$ ):

$$\frac{2 k m \bar{r}}{\bar{r}^2 + a^2 - 2 m \bar{r}} d\bar{r}^2 = e^{2\mu_s - 2\nu_s} dr^2; \quad 2 k m \bar{r} = e^{2\mu_s - 2\nu_s} r^2.$$

Отсюда

$$\frac{d\bar{r}}{\sqrt{\bar{r}^2 + a^2 - 2 m \bar{r}}} = \frac{dr}{r},$$

что определяет связь  $\bar{r}$  и  $r$ :

$$\bar{r} = r + m + \frac{m^2 - a^2}{4r}. \quad (9.22)$$

Сшивание компонент  $g_{03}$

$$\Omega \left( r + m + \frac{m^2 - a^2}{4r} \right)^2 e^{-2\nu_s} = \frac{a}{k}$$

позволяет вычислить  $\Omega$ , затем значения на границе

$$e^{\lambda_s} = 1 + \frac{a^2 - m^2}{4r^2}; \quad e^{-2\nu_s} = \frac{k}{k-1} \left( 1 - \frac{a^2 \sin^2 \vartheta}{k^2 \left( r + \frac{a^2 - m^2}{4r} \right)^2} \right)$$

и

$$e^{2\mu_s - 2\nu_s} = \frac{k m ((m + 2r)^2 - a^2)}{2 r^3}.$$

При этом

$$\Omega = \frac{a(k-1)}{k^2 \left( r + \frac{a^2 - m^2}{4r} \right)^2 - a^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Для сшивания с метрикой Керра интегрирование из центра должно вестись с такими параметрами, чтобы на поверхности, где  $p = 0$ , выйти на эти соотношения.

Угловую скорость  $\Omega$  можно выразить через внешние координаты. Так как

$$\left( r + \frac{a^2 - m^2}{4r} \right)^2 = \bar{r}^2 - 2m\bar{r} + a^2,$$

то распределение  $\Omega$  на поверхности имеет вид

$$\Omega = \frac{a}{\bar{r}((1+k)\bar{r} - 2km) + (1+k)a^2}. \quad (9.23)$$

В частности, отношение угловой скорости на экваторе  $\Omega_e$  к угловой скорости на полюсах  $\Omega_p$

$$\frac{\Omega_e}{\Omega_p} = \frac{2k^2 m (km + \sqrt{k^2 m^2 - a^2})}{4k^3 m^2 + a^2(1+k)},$$

показывает, что при  $k \gg |a|/m$  угловая скорость на поверхности постоянна, но при уменьшении  $k$  становится неоднородной:

$$\frac{\Omega_e}{\Omega_p} \approx 1 - \frac{a^2}{k^2 m^2} \frac{1+2k}{4k}.$$

Угловая скорость на экваторе меньше угловой скорости на полюсах. Распределение угловой скорости на поверхности звезды (9.23) определяется только параметрами метрики Керра  $a$ ,  $m$  и параметром поверхности  $k$  и не зависит от вещества (которое, однако, полагается сжимаемой идеальной жидкостью).

## 9.5. Вариационный метод

Уравнения равновесия (9.5)–(9.8) могут быть получены из принципа минимума потенциальной энергии, выраженной через рассматриваемые поля:

$$U = U_{\Omega} + U_{\nu} + U_{\mu\lambda} + L_p, \quad (9.24)$$

где

$$U_{\Omega} = \frac{1}{4} e^{3\lambda-4\nu} r^2 \sin^3 \vartheta (\Omega_{\vartheta}^2 + r^2 \Omega_r^2); \quad (9.25)$$

$$U_{\nu} = -e^{\lambda} \sin \vartheta (\nu_{\vartheta}^2 + r^2 \nu_r^2); \quad (9.26)$$

$$U_{\mu\lambda} = e^{\lambda} \sin \vartheta ((\text{ctg} \vartheta + \lambda_{\vartheta}) \mu_{\vartheta} + (1 + r \lambda_r) r \mu_r). \quad (9.27)$$

Особо следует сказать о лагранжиане жидкости  $L_p$ , найденном Шютцем [61] через давление как функции энтальпии  $\chi$ , определяющей плотность вещества  $\rho$  и плотность энергии  $\epsilon$ :

$$\frac{dp}{d\chi} = \rho; \quad \epsilon = \rho\chi - p = \chi \frac{dp}{d\chi} - p; \quad \epsilon + p = \chi\rho.$$

Зависимость давления от компоненты  $g_{00}$ , полученная из тождеств Гильберта (9.3), связывает энтальпию с этой компонентой:  $\chi = k/\sqrt{g_{00}}$ , где константа  $k$  определяется соотношением на границе при нулевом давлении. Лагранжиан Шютца записывается в виде

$$L_p = \sqrt{-g} p(\chi); \quad \chi = 1/\sqrt{g_{00}};$$

$$g_{00} = e^{2\nu} - e^{2\lambda-2\nu} q^2 \Omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta; \quad \sqrt{-g} = e^{2\mu+\lambda-2\nu} r^2 \sin \vartheta.$$

Вариация этого лагранжиана по компонентам метрики определяет правые части в вариационных уравнениях:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \nu} = \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \nu} - \frac{(\epsilon + p)}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial \nu};$$



$$\frac{\partial L_p}{\partial \Omega} = -\frac{(\epsilon + p)}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial \Omega},$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \lambda} = \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \lambda} - \frac{(\epsilon + p)}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial \lambda}.$$

Так как  $g_{00}$  не зависит от  $\mu$ , то эта вариация проще:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \mu} = \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \mu} = 2p.$$

Вариация по  $\mu$  приводит лишь к уравнению для  $\lambda$  (9.8). Однако уравнение (9.11) – не вариационное, оно есть результат выбора переменных такими, чтобы  $g_{r\vartheta} = 0$ , и является дополнительным.

Важным является различие знаков у различных составляющих:  $U_\Omega$  положительно определена, а  $U_\nu$  – отрицательно определена. С точки зрения классической физики выражение энергии (9.24) может включать произвольный набор компонент. Например, в монографии автора [7] рассмотрены чисто вихревые поля, содержащие компоненты  $\Omega$ ,  $\mu$  и  $\lambda$ . Энергия этих полей положительно определена.

## 9.6. Нерелятивистский предел

В нерелятивистском пределе давление  $p$  пренебрежимо мало по сравнению с плотностью энергии, основной составляющей которой является  $\rho c^2$ . В линейном приближении в уравнениях (9.8)–(9.11) можно пренебречь квадратичными комбинациями градиентов метрических функций. В этом приближении источники содержатся только в уравнениях для  $\Omega$  и  $\nu$ :

$$\Omega_{,rr} + \frac{4\Omega_{,r}}{r} + \frac{\Omega_{,\vartheta\vartheta} + 3\text{ctg}\vartheta\Omega_{,\vartheta}}{r^2} = \frac{8\pi k\rho}{c^2}\Omega. \quad (9.28)$$

Правая часть содержит в знаменателе  $c^2$ , и в нерелятивистском приближении ей можно пренебречь, так что решением оказы-

вается, в частности,  $\Omega = \text{const}$ . Для гравитационного потенциала  $\phi = \nu c^2$  уравнение (9.6) переходит в уравнение Лапласа–Пуассона:

$$\phi_{,rr} + \frac{2\phi_{,r}}{r} + \frac{\phi_{\vartheta\vartheta} + \text{ctg}\vartheta \phi_{,\vartheta}}{r^2} \equiv \Delta\phi = 4\pi k\rho. \quad (9.29)$$

Дифференциальные уравнения (9.7)–(9.11) оказываются линейными и однородными и содержат решения  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0$ .

Энтальпия, а вместе с ней и давление, являются функциями компоненты

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2} \left( \phi - \frac{\Omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{2} \right).$$

Величина  $\phi - \Omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta / 2$  представляет собой гравитационный потенциал с учетом центробежного. На поверхности звезды он должен быть постоянным.

Возможны более мягкие приближения, например, линеаризованные уравнения, но без пренебрежения релятивизмом или давлением. Источники в уравнениях (9.5)–(9.7) содержат в знаменателе величину  $g_{00}$ . Хотя все наблюдаемые движения небесных тел являются существенно нерелятивистскими, в процессе коллапса вращающихся объектов (звезд или даже галактик в целом) возможно приближение границы этого объекта к горизонту, где скорость света стремится к нулю, что делает даже медленное движение релятивистским, и учет релятивистских эффектов для таких объектов становится обязательным.

# Глава 10

## Уравнение Эйлера в поле скоростей

Уравнения Эйлера записываются в системе с произвольным полем скоростей в общековариантном виде с помощью инвариантной производной по времени. Вокруг однородно вращающегося шара имеется серия точных решений в виде гармонических и вихревых мод с полусуточным периодом. 24 декабря 2008 г., ИКИ, HEA-2008.

### 10.1. Введение

Гидродинамическое уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (10.1)$$

с первого взгляда не является инвариантным даже по отношению к переходу из одной инерциальной системы в другую. Действительно, если в таком виде оно выполняется в некоторой инерциальной системе  $K$ , то в системе  $K'$ , относительно которой система  $K$  движется с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$ , уравнение Эйлера примет вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' = (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{v}' - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (10.2)$$

отличный от (10.1).

Однако именно Эйлер заложил основы понятия *инвариантная производная по времени*, записав сначала в системе, связанной с некоторой частицей жидкости, второй закон Ньютона,

затем заметив, что при переходе в движущуюся систему функция  $f(\mathbf{r}, t)$  переходит в функцию  $\bar{f}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}(t), t)$ , так что ее производная по времени в исходной системе выражается через производную по времени в движущейся системе:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f. \quad (10.3)$$

Именно из-за этого появилась квадратичная по скоростям добавка в уравнении (10.1). Поэтому производную по времени в уравнении (10.2) нужно заменить на *Эйлерову* производную, что эквивалентно добавлению в левую часть слагаемого  $(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{v}'$ , взаимно уничтожающегося с появившимся аналогичным слагаемым в правой части, что восстанавливает исходный вид уравнения Эйлера (10.1) уже в движущейся системе. Таким образом, в уравнении Эйлера производная по времени – не просто частная производная, но некий оператор – производная по времени в исходной системе.

Однако ее еще нельзя назвать *инвариантной производной по времени* по двум причинам. Во-первых, она является инвариантной только по отношению к постоянной и однородной скорости перемещения относительно исходной инерциальной системы. Так, при рассмотрении динамики жидкости во вращающейся системе, с неоднородным полем скоростей  $\mathbf{V} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ , приходится из *физических соображений*, руками, вводить кориолисово ускорение [13, 62, 63]. Во-вторых, эйлерово преобразование производной по времени справедливо при любом поле скоростей только для скалярных функций, а в преобразовании тензорных полей нужно учитывать их *Ли-вариацию*, связанную с преобразованием компонент поля при мгновенном преобразовании координат.

## 10.2. Инвариантная производная по времени

Обозначим пространственные координаты инерциальной системы через  $\bar{x}^i$ , а некоторой неинерциальной системы —  $x^j(\bar{x}^i, t)$ . Производные по времени, если функция зависит от координат, в различных системах, в которых сами координаты меняются во времени, выражаются по-разному. Производную по времени в инерциальной системе будем обозначать символом  $D_t$  и назовем ее *инвариантной производной по времени*. По правилу дифференцирования сложной функции

$$D_t F = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V^i \frac{\partial F}{\partial x^i}; \quad V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad (10.4)$$

что и определяет инвариантную производную от скаляра (давления, плотности) в произвольной неинерциальной системе.

Для тензорного поля выражение чуть сложнее, так как производится еще преобразование, связанное с индексами. Рассмотрим сначала преобразование контравариантного векторного поля  $A^i$ . В инерциальной системе отсчета его компоненты будем обозначать  $\bar{A}^i$ :

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j; \quad \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \left( \frac{\partial A^j}{\partial t} + V^k \frac{\partial A^j}{\partial x^k} \right) + A^j \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right).$$

Преобразуем последнюю производную:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right) = - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^l}{\partial t} = - \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial x^j} V^l.$$

Отсюда инвариантная производная по времени от контравариантного векторного поля выражается:

$$D_t A^i = \frac{\partial}{\partial t} A^i - A^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i + V^j \frac{\partial}{\partial x^j} A^i = \dot{A}^i - A^j V_{;j}^i + V^j A_{;j}^i. \quad (10.5)$$

Она записывается одинаковым образом через обычные и ковариантные производные, так как в последнем случае все связности взаимно уничтожаются.

Аналогично, для ковариантного векторного поля

$$D_t B_i = \frac{\partial}{\partial t} B_i + V_{;i}^j B_j + V^j B_{i;j} \quad (10.6)$$

и для тензора произвольного ранга (в данном примере – третьего):

$$D_t Q_{jk}^i = \frac{\partial}{\partial t} Q_{jk}^i - V_{;s}^i Q_{jk}^s + V_{;j}^s Q_{sk}^i + V_{;k}^s Q_{js}^i + V^s Q_{jk;s}^i. \quad (10.7)$$

Она состоит из  $r + 2$  составляющих, где  $r$  – ранг тензора. При  $r = 0$  (скаляр) имеем выражение (10.4) с двумя составляющими: частной производной по времени и “переносным” членом, определяемым полем абсолютных скоростей. Для тензоров, имеющих индексы, к каждому индексу (верхнему или нижнему) добавляется слагаемое, содержащее производную поля скоростей как для контравариантного (10.5) или ковариантного векторного поля (10.6) в зависимости от расположения индекса. Инвариантная производная по времени была введена при описании динамики пространства [6, 7, 64].

Теперь все соотношения, полученные в инерциальной системе координат, можно перенести в неинерциальную, заменив обычную производную по времени на инвариантную.

### 10.3. Ковариантное уравнение Эйлера

Ковариантное уравнение Эйлера для гидродинамического поля скоростей  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  в неинерциальной системе, относительно которой инерциальная имеет поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , должно выражаться через инвариантную производную по времени от поля скоростей относительно инерциальной системы, определяемого

разностью  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ , равной в гравитационном поле с потенциалом  $\phi$ :

$$D_t \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \nabla) \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi.$$

Левая часть этого уравнения раскрывается так:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{V} \right) + ((\mathbf{v} - \mathbf{V}) \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{V})) - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Мы приходим к ковариантному виду уравнения Эйлера, применимому с любым полем скоростей и в любой системе координат с учетом того, что пространственные производные векторов в выбранной метрике должны быть ковариантными, как это предписывается в римановой геометрии:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (10.8)$$

При однородном и постоянном поле скоростей все производные поля  $\mathbf{V}$  исчезают и уравнение (в любой инерциальной системе) совпадает с (10.1).

Во вращающейся системе  $\mathbf{V} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ , поэтому

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{V} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}]; \quad (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]] = \nabla \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2},$$

и уравнение Эйлера принимает известный вид [13, 62, 63] в гравитационном потенциале  $\phi$  с корректировкой на кориолисово ускорение:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left( \phi + \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2} \right). \quad (10.9)$$

В случае зависимости угловой скорости от времени к правой части добавится  $[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}]$ .

## 10.4. Гидродинамика на вращающемся шаре

Используем уравнение (10.9) для описания потоков на равномерно вращающейся сфере. Естественно выбрать сферическую систему координат, в которой, однако, вместо традиционного угла  $\vartheta$  (широты) за независимую переменную возьмем его косинус  $\xi = \cos \vartheta$ , так что метрика примет вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \left( \frac{d\xi^2}{1 - \xi^2} + (1 - \xi^2) d\varphi^2 \right). \quad (10.10)$$

При вычислении ковариантных производных понадобятся связности, определяемые зависимостью метрического тензора от координат. Ненулевые компоненты в метрике (10.10):

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\xi}^\xi &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}; & \Gamma_{\xi\xi}^\xi &= \frac{\xi}{1 - \xi^2}; & \Gamma_{\varphi\varphi}^\xi &= \xi(1 - \xi^2); \\ \Gamma_{\xi\xi}^r &= -\frac{r}{1 - \xi^2}; & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r(1 - \xi^2); & \Gamma_{\xi\varphi}^\varphi &= -\frac{\xi}{1 - \xi^2}. \end{aligned}$$

В сферической системе поле скоростей имеет одну постоянную компоненту  $V^\varphi = \Omega$ . Мы будем везде записывать векторы в контравариантном виде (с верхними индексами), например, вектор вращения выглядит так:

$$V = (V^r, V^\xi, V^\varphi) = (0, 0, \Omega).$$

Рассмотрим сначала потенциальные колебательные (с частотой  $\omega$ ) моды на сфере с потенциалом

$$\psi = f_r(r) P_{lm}(\vartheta) e^{im\varphi} e^{-i\omega t} = f_r(r) P_{lm}(\vartheta) e^{im(\varphi - \frac{\omega t}{m})},$$

определяющим компоненты скорости  $v^i = g^{ii} \partial_i \psi$  (мы не будем здесь их выписывать). При  $\Omega = 0$  (отсутствие вращения) эта



потенциальная мода является решением уравнений Эйлера. Однако при  $\Omega \neq 0$  к ней добавляется вихревая составляющая, линейная по  $\Omega$  и по полю скоростей: если в данный момент поле скоростей является потенциальным, то производная по времени, вычисленная по уравнению Эйлера, содержит вихревую составляющую: на вращающейся сфере потенциальная мода рождает вихревые.

Обратим внимание еще на один вид мод – *гармонические моды*. Это безвихревые векторные поля с нулевой дивергенцией – потенциальные поля с гармоническим потенциалом.

При отсутствии вращения в сферической системе хорошо известны стационарные гармонические функции, имеющие вид

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (10.11)$$

а градиент таких функций обладает и нулевым ротором, и нулевой дивергенцией.

Среди векторных полей имеется однопараметрическое подмножество с нулевым ротором и нулевой дивергенцией (гармонические поля):

$$\mathbf{v}_m^0 = e^{im\varphi} r^{m-2} (\sqrt{1-\xi^2})^m \left( r, -\xi, \frac{i}{1-\xi^2} \right), \quad (10.12)$$

удовлетворяющее нелинейному уравнению, входящему в уравнение Эйлера:

$$(\bar{\mathbf{v}} \nabla) \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (10.13)$$

Гармоническое поле с заданным  $m > 0$  порождает серию вихревых полей с целочисленным индексом  $k$ :  $\mathbf{v}_m^k = \mathbf{v}_m^0 (r\xi)^k$ , также являющихся решениями уравнения (10.13). Дивергенция этих полей также равна нулю, а ротор пропорционален индексу  $k$ :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_m^k = -\frac{ik}{r\xi} \mathbf{v}_m^k = -ik \mathbf{v}_m^{k-1}. \quad (10.14)$$

На сфере, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , амплитуда колебаний оказывается зависящей от времени, а вследствие стационарности эта зависимость определяется экспоненциальным множителем  $e^{-i\omega t}$ . Уравнение Эйлера (без перепада давления, так как дивергенция этих полей равна нулю)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - 2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = -\nabla \left( \frac{[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2}{2} \right) \quad (10.15)$$

приводит к единственному требованию  $\omega = 2\Omega$ , то есть период колебаний каждой такой моды равен половине периода вращения сферы (половине суток).

Таким образом, имеется двухпараметрическая серия точных решений уравнения (10.15):

$$\mathbf{v}_m^k = e^{i m \varphi - 2 i \Omega t} r^{m+k-2} \xi^k (\sqrt{1-\xi^2})^m \left( r, -\xi, \frac{i}{1-\xi^2} \right), \quad (10.16)$$

а также комплексно сопряженных им.

Первые поля при  $k = 0$ :

$$v_1^0 = e^{i(\varphi - 2\Omega t)} \left( \sqrt{1-\xi^2}, -\frac{\xi \sqrt{1-\xi^2}}{r}, \frac{i}{r \sqrt{1-\xi^2}} \right);$$

$$v_2^0 = e^{i(2\varphi - 2\Omega t)} (r(1-\xi^2), -\xi(1-\xi^2), i).$$

Наиболее существенным моментом является одинаковая временная зависимость для всех этих мод – с полусуточным периодом.

Две причины определяют полусуточную периодичность рассмотренных мод:

1. Равенство нулю дивергенции не вызывает изменений давления, волна не является акустической.

2. Равенство нулю  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  приводит к линейности уравнения динамики:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] + [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]] = 0,$$

имеющего решения с зависимостью от времени  $e^{2i\Omega t}$ .

Специфическая геометрия решений становится более понятной при переходе к декартовой системе координат:

$$x = r \sqrt{1 - \xi^2} \cos \varphi; \quad y = r \sqrt{1 - \xi^2} \sin \varphi; \quad z = r \xi.$$

Преобразование компонент вектора осуществляется с помощью матрицы

$$(J) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \xi, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \xi^2} \cos \varphi & \sqrt{1 - \xi^2} \sin \varphi & \xi \\ -\frac{\xi}{r} \sqrt{1 - \xi^2} \cos \varphi & -\frac{\xi}{r} \sqrt{1 - \xi^2} \sin \varphi & \frac{1 - \xi^2}{r} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sqrt{1 - \xi^2}} & \frac{\cos \varphi}{r \sqrt{1 - \xi^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

определяющей вектор в декартовой системе координат:

$$(J) \cdot \mathbf{v}_m^k = (x - iy)^{m-1} z^k (1, i, 0) e^{2i\Omega t}. \quad (10.17)$$

При  $k = 0$  это хорошо известные двумерные решения на основе функций комплексной переменной, переведенные в трехмерье добавлением нулевой третьей компоненты. Умножение на произвольную функцию третьей переменной делает поле вихревым, но соотношения  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  и  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$  сохраняются.

Выражение (10.17) обобщается: полусуточный период имеет вектор

$$\mathbf{v} = w(x + iy) f(z) (1, i, 0) e^{2i\Omega t} \quad (10.18)$$

с произвольной функцией комплексной переменной  $w(x + iy)$  и произвольной функцией  $f(z)$ .

В двумерном случае полусуточный период во вращающейся системе имеют векторы [63]

$$\mathbf{v} = w(x + iy) (1, i) e^{2i\Omega t}.$$

## 10.5. Заключение

Колебания давления с полусуточным периодом экспериментально были обнаружены давно. Прочитируем Лэмба [62]:

“Если обратить внимание на возможное увеличение амплитуды вследствие резонанса, то интересно поставить вопрос о том, не может ли атмосфера иметь свободные периоды приблизительно в 12 солнечных или лунных часов...”

Известно из опыта, что в показаниях барометра наблюдаются правильные колебания с периодом в одни *солнечные* сутки и в половину *солнечных* суток, между тем как влияние соответствующих лунных приливов почти незаметно. Амплитуда полусуточных колебаний (по солнечным суткам) на экваторе примерно равна 0.937 мм, в то время как амплитуда, которую дает “статическая” теория приливов, равна только 0.011 мм.”

Лэмб описывает разные модели возникновения полусуточных колебаний, однако при учете только дивергентных мод (с отличной от нуля дивергенцией) накладываются жесткие специальные требования на параметры атмосферы. Рассмотренные выше гармонические и вихревые моды имеют полусуточный период, никак не связанный с параметрами атмосферы.

Хотя сами гармонические и вихревые моды перепада давления не создают, но, резонансно взаимодействуя (вследствие существенной нелинейности уравнения Эйлера) с дивергентными модами, могут приводить к колебаниям давления с полусуточным периодом.

# Глава 11

## Метод граничных мод

Граничные моды – с максимальным по модулю значением  $m$  – находятся из дифференциальных уравнений первого порядка. Остальные сферические моды получаются из них действием операторов понижения или повышения. Техника особенно выигрышна для многокомпонентных полей. Она применяется для нахождения мод векторных полей. Использование ее для спиновых полей приводит к непосредственному отделению уравнения для радиальных функций, например, при описании атома водорода уравнением Дирака.

### 11.1. Введение

Традиционная операторная техника получения сферических функций достаточно прозрачна: в алгебре Ли трехмерной группы вращений имеется два коммутирующих оператора  $\hat{L}_z$  и  $\hat{L}^2$ , и их собственные функции – сферические функции. То, что они являются собственными функциями  $\hat{L}_z$ , приводит к специфической зависимости от угла  $\varphi$  как  $e^{im\varphi}$ , а действие при этом оператора  $\hat{L}^2$  приводит к уравнению Лежандра для функций от  $\cos\vartheta$ . Также вводятся операторы  $\hat{L}_+$  и  $\hat{L}_-$ , повышающие и понижающие индекс  $m$  моды. Воздействие этими операторами на моду с  $m = 0$ , представляемую полиномом Лежандра с индексом  $l$ , генерирует серию мод с индексом  $m$ , изменяющимся от  $-l$  до  $+l$ .

При описании колебаний атмосферы и океанов, распространения радиоволн приходится сталкиваться с векторными функ-

циями, а в квантовой механике, учитывающей спин электрона, необходимо иметь дело со спинорными функциями. Для них тоже выведены операторы  $\hat{L}_z$  и  $\hat{L}^2$ , однако, так как эти функции многокомпонентные, то действие оператора  $\hat{L}^2$  приводит к системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых перемешаны разные компоненты полей. Хотя такая процедура генерации мод и доведена до конца (см., например, [65–67]), однако она слишком громоздка.

*Метод граничных мод* упрощает процедуру построения мод (не только скалярных, спинорных и векторных, но и мод любой тензорной размерности) за счет следующего обстоятельства: оператор  $\hat{L}^2$  может быть представлен в виде

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_- \cdot \hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + i \hat{L}_z. \quad (11.1)$$

Построение серии мод начинается с *граничной моды* с наибольшим значением  $m = l$ . Действие на эту моду оператором  $\hat{L}_+$  дает нулевой вектор (или спинор). Эта мода вследствие конструкции (11.1) автоматически оказывается собственной функцией оператора  $\hat{L}^2$  с собственным значением  $-l(l+1)$ .

Требование граничности моды определяется дифференциальным оператором первого порядка  $\hat{L}_+$ , что существенно упрощает процедуру по сравнению с традиционной. Далее, действуя на эту моду оператором  $\hat{L}_-$ , получаем моды с меньшими  $m$  вплоть до  $m = -l$ . При этом, так как оператор  $\hat{L}_-$  коммутирует с оператором  $\hat{L}^2$ , все эти моды являются собственными модами последнего с тем же собственным значением  $-l(l+1)$ .

В данной главе методом граничных мод мы построим сферические моды для векторных и спинорных полей.

## 11.2. Операторы Киллинга

Основной структурой, определяющей геометрические свойства пространства, является выражение для расстояния между двумя бесконечно близкими точками – метрический элемент,

задаваемый метрическим тензором  $\gamma_{ij}(x)$  с определенной зависимостью его компонент от координат:

$$dl^2 = \gamma_{ij}(x) dx^i dx^j. \quad (11.2)$$

Например, бесконечно малый элемент длины в сферической системе имеет вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (11.3)$$

Проведем теперь бесконечно малое преобразование координат, определяемое векторным полем  $\xi^i(x)$  и параметром малости  $\epsilon$  (индекс после запятой означает частную производную по соответствующей координате:  $\xi^i_{,j} \equiv \partial_j \xi^i$ ):

$$x^i = \bar{x}^i + \epsilon \xi^i(x); \quad dx^i = d\bar{x}^i + \epsilon \xi^i_{,j} d\bar{x}^j. \quad (11.4)$$

Выпишем преобразования метрического элемента (11.2) в линейном порядке по  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} dl^2 &= \gamma_{ij}(\bar{x}^k + \epsilon \xi^k)(d\bar{x}^i + \epsilon \xi^i_{,k} d\bar{x}^k)(d\bar{x}^j + \epsilon \xi^j_{,k} d\bar{x}^k) \approx \\ &\approx \gamma_{ij}(\bar{x}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j + \epsilon (\gamma_{ij,k} \xi^k + \gamma_{kj} \xi^k_{,i} + \gamma_{ik} \xi^k_{,j}) d\bar{x}^i d\bar{x}^j. \end{aligned}$$

В этом выражении мы заменили  $\xi^i_{,k} d\bar{x}^k \rightarrow \xi^i_{,k} d\bar{x}^k$ , так как различие этих выражений дает вклад лишь в квадратичное по  $\epsilon$  выражение для вариации метрического элемента.

Линейная по  $\epsilon$  составляющая вариации называется *Ли-вариацией* метрики по векторному полю  $\xi$ :

$$\delta_\xi \gamma_{ij} = \gamma_{ij,k} \xi^k + \gamma_{kj} \xi^k_{,i} + \gamma_{ik} \xi^k_{,j}. \quad (11.5)$$

Если векторное поле  $\xi^i$  таково, что  $\delta_\xi \gamma_{ij} = 0$ , оно называется *полем Киллинга*, а преобразование координат этим полем – *движением пространства*, так как после преобразования метрический элемент имеет точно такое же выражение, как и до преобразования, то есть геометрические свойства пространства

не изменяются. Движениями евклидова пространства являются сдвиги и повороты.

При преобразовании координат (11.4) могут изменяться другие поля. Например, Ли-вариация скалярного поля определяется следующим образом:

$$f(x) = f(\bar{x} + \epsilon \xi) = f(\bar{x}) + \epsilon (\xi^i \partial_i) f(x); \quad \delta_\xi f(x) = (\xi^i \partial_i) f(x). \quad (11.6)$$

Вычисляя Ли-вариации векторного поля следует учесть, что в линейном по  $\epsilon$  приближении

$$\bar{x}^j = x^j - \epsilon \xi^j; \quad \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} = \delta_i^j - \epsilon \xi^j_{,i}.$$

Далее нужно рассмотреть инвариантное выражение:

$$\begin{aligned} A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} &= A^i(\bar{x} + \epsilon \xi) \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \\ &= (A^i + \epsilon \xi^j A^i_{,j}) (\delta_i^j - \epsilon \xi^j_{,i}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = (A^i(\bar{x}) + \epsilon \delta_\xi A^i) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}. \end{aligned}$$

Отсюда находится Ли-вариация векторного поля:

$$\delta_\xi A^i = \xi^j A^i_{,j} - A^j \xi^i_{,j} \equiv [\xi, \mathbf{A}]^i. \quad (11.7)$$

В это выражение входят два векторных поля  $\xi$  и  $\mathbf{A}$ , причем антисимметрично:

$$[\xi, \mathbf{A}] = -[\mathbf{A}, \xi].$$

Такая конструкция называется *коммутатором* двух векторных полей. Коммутатор есть также векторное поле.

При бесконечно малом преобразовании координат с помощью векторного поля  $\mathbf{k}$  все поля получают бесконечно малые добавки – *Ли-вариации*, определяемые линейными операторами. Ли-вариация скалярного поля

$$\delta_k f = k^i \partial_i f = \hat{K} f. \quad (11.8)$$



Ли-вариация векторного поля определяется коммутатором, являющимся линейным оператором в пространстве векторных полей:

$$\delta_k \mathbf{A} = [\mathbf{k}, \mathbf{A}] = \hat{K} \mathbf{A}. \quad (11.9)$$

Ли-вариация по векторному полю Киллинга определяет *оператор Киллинга*. Наиболее важным свойством операторов Киллинга поля любой тензорной размерности является *теорема о коммутации*:

**Теорема 1.** *Коммутатором операторов, порожденных двумя полями Киллинга, является оператор, порожденный коммутатором этих полей.*

### 11.3. Операторы вращений

Сферические координаты слегка модифицируем, введя вместо угла  $\vartheta$  его косинус  $\xi = \cos \vartheta$  в качестве независимой переменной. В этих координатах метрика принимает вид:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \left( \frac{d\xi^2}{1 - \xi^2} + (1 - \xi^2) d\varphi^2 \right). \quad (11.10)$$

Последняя метрика допускает три линейно независимых векторных поля Киллинга (три бесконечно малых вращения). Векторные поля мы представляем их контравариантными компонентами  $(k^r, k^\xi, k^\varphi)$ :

$$k_3 = (0, 0, 1); \quad k_\pm = \left( 0, \pm i \sqrt{1 - \xi^2}, \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) e^{\pm i\varphi}. \quad (11.11)$$

Коммутаторы полей Киллинга:

$$[\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_+] = i \mathbf{k}_+; \quad [\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_-] = -i \mathbf{k}_-; \quad [\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-] = 2i \mathbf{k}_3. \quad (11.12)$$

## 11.4. Моды векторных полей

Важность использования операторов Киллинга можно увидеть в следующей теореме. Так как векторы Киллинга не изменяют метрики, то при преобразовании Киллинга не меняется оператор ротор.

**Теорема 2.** *С точки зрения теории линейных операторов коммутатор с полем Киллинга и ротор коммутируют.* Например:

$$[\mathbf{k}_p, \text{rot } \mathbf{A}] = \text{rot } [\mathbf{k}_p, \mathbf{A}]. \quad (11.13)$$

### 11.4.1. Граничные моды

В качестве первого оператора, определяющего моды полей любой тензорной размерности (скалярного, векторного и т.д.), удобно выбрать оператор, порожденный полем Киллинга  $\mathbf{k}_3$  (11.11). Моды полей, являющиеся собственными векторами этого оператора, имеют определенную зависимость от угла  $\varphi$  – как  $e^{im\varphi}$ . Назовем такую моду  $m$ -модой.

Из коммутационных соотношений (11.12), приводящих к соответствующим коммутаторам операторов Киллинга, следует, что оператор  $\hat{K}_+$ , определяемый векторным полем  $\mathbf{k}_+$ , действуя на  $m$ -моду, переводит ее в  $m + 1$ -моду (увеличивает номер моды). Соответственно  $\hat{K}_-$  уменьшает номер моды.

Моды, не допускающие увеличения или уменьшения  $m$ , назовем *граничными модами*. Условием того, что данная векторная мода – верхняя граничная, является равенство нулю коммутатора векторного поля Киллинга  $\mathbf{k}_+$  с данным полем. При своем этому максимальному индексу наименование  $m_{max} = l$ .

Так как операторы вращения действуют только на угловые переменные, мы пока не будем обозначать зависимость функций от радиуса. Выберем граничную моду в виде

$$\mathbf{A} = (f_r(\xi), f_\xi(\xi), i f_\varphi(\xi)) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi}.$$

Коммутатор вектора  $\mathbf{k}_+$  с этой модой приводит к векторному полю

$$[\mathbf{k}_+, \mathbf{A}] = (i f_r'(\xi), -i \frac{Q_1}{1 - \xi^2}, -\frac{Q_2}{(1 - \xi^2)^2}) (\sqrt{1 - \xi^2})^{l+1} e^{i(l+1)\varphi}, \quad (11.14)$$

где

$$Q_1 = f_\varphi(\xi) + f_\xi'(\xi) + \frac{\xi}{1 - \xi^2} f_\xi(\xi);$$

$$Q_2 = f_\xi(\xi) + (1 - \xi^2) ((1 - \xi^2) f_\varphi'(\xi) - \xi f_\varphi'(\xi)).$$

Условием того, что выбранная мода является граничной, является равенство нулю  $Q_1$  и  $Q_2$ , откуда  $f_\varphi(\xi)$  выражается через  $f_\xi(\xi)$ :

$$f_\varphi = -f'(\xi) - \frac{\xi}{1 - \xi^2} f_\xi(\xi), \quad (11.15)$$

а  $f_\xi(\xi)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $f_\xi''(\xi) = 0$ , то есть  $f_\xi = a + b\xi$ , а

$$f_\varphi = -b - \frac{(a + b\xi)\xi}{1 - \xi^2}.$$

Также из уравнения (11.14) следует, что  $f_r$  не зависит от  $\xi$ . Константы  $a, b, c$  определяют три граничные поляризации, для которых теперь найдем зависимость от радиуса:

$$A_1 = \left( f_r^{(1)}(r), f_\xi^{(1)}(r), -i f_\xi^{(1)}(r) \frac{\xi}{1 - \xi^2} \right) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi};$$

$$A_2 = \left( i f_r^{(2)}(r), i f_\xi^{(2)}(r) \xi, f_\xi^{(2)}(r) \frac{1}{1 - \xi^2} \right) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi};$$

$$A_0 = (f_r^{(0)}(r), 0, 0) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi}. \quad (11.16)$$

В первой и второй модах радиальная часть у компонент  $A^\xi$  и  $A^\varphi$  одинакова, так как операторы  $\hat{K}_\pm$  преобразуют только угловые компоненты.

В теории углового момента моды ищутся как собственные функции операторов  $\hat{K}_3$  и квадратичного  $\hat{K}^2 = \hat{K}_- \cdot \hat{K}_+ + \hat{K}_3^2 + i\hat{K}_3$ , коммутирующего с  $\hat{K}_-$ ,  $\hat{K}_+$ ,  $\hat{K}_3$ . Так как для граничной моды  $\hat{K}_+ \cdot A = 0$ , она автоматически оказывается собственной модой оператора  $\hat{K}^2$  с собственным значением  $l(l+1)$ . Поэтому движение от граничных мод для скалярного поля требует решения лишь дифференциального уравнения первого порядка, а для многокомпонентных полей с высшим спином, имеющих по две поляризации – системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. В этом состоит существенное упрощение *метода граничных мод*.

#### 11.4.2. Радиальные функции

Для монохроматических волн уравнения Максвелла приводятся к виду

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = ik \mathbf{B}; \quad \mathbf{rot} \mathbf{B} = -ik \mathbf{E}. \quad (11.17)$$

После выбора масштаба  $kr = 1$  эти уравнения преобразуются:

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{E}; \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mathbf{B}. \quad (11.18)$$

Электромагнитные поля удовлетворяют уравнениям  $\mathbf{div} \mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$ , откуда в (11.16) следует  $f_r^0(r) = 0$  и  $f_r^1(r) = 0$ , то есть остаются всего две моды.

Рассмотрим моду  $A_1$ :

$$A_1 = (0, 1, -i \frac{\xi}{1 - \xi^2}) f_1(r) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi}. \quad (11.19)$$

Ротор этого поля

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 = & \left( i f_1(r), -i \xi \left( f_1'(r) + \frac{2}{r} f_1(r) \right) \right), \\ & - \frac{1}{1 - \xi^2} \left( f_1'(r) + \frac{2}{r} f_1(r) \right) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi}; \end{aligned} \quad (11.20)$$

$$\mathbf{rot rot} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 = \left(0, 1, -i \frac{\xi}{1 - \xi^2}\right) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{il\varphi} \frac{F(f_1)}{r^2}, \quad (11.21)$$

где

$$F(f_1) = r^2 f_1''(r) + 4r f_1'(r) + (r^2 - l^2 - l + 2) f_1(r).$$

Дифференциальное уравнение

$$r^2 f_1''(r) + 4r f_1'(r) + (r^2 - (l+2)(l-1)) f_1(r) = 0 \quad (11.22)$$

дает радиальную зависимость.

В окрестности нуля, как это следует из подстановки  $f = r^k$ ,  $r \rightarrow 0$ :

$$k(k-1) + 4k - (l+1)(l+2) = 0,$$

откуда  $k_1 = l-1$ ;  $k_2 = -(l+2)$ . Радиальные функции без особенностей в нуле определяют колебательные моды в резонаторах, а сингулярные – мультипольное излучение.

Дифференциальное уравнение (11.22) порождает рекуррентное соотношение для функций с разными  $l$ :

$$u_{l+1}(r) = \frac{l-1}{r} u_l(r) - u_l'(r). \quad (11.23)$$

Первые радиальные функции ( $u_l$  – не сингулярные при  $r = 0$ , а  $w_l$  – сингулярные):

$$u_1 = \frac{r \cos r - \sin r}{r^3}; \quad w_1 = \frac{\cos r + r \sin r}{r^3};$$

$$u_2 = \frac{3r \cos r + (r^2 - 3) \sin r}{r^4}; \quad w_2 = \frac{3r \sin r - (r^2 - 3) \cos r}{r^4}.$$

Они могут быть получены из общих формул:

$$u_l(r) = r^{l-1} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left( \frac{\sin r}{r} \right);$$

$$w_l(r) = r^{l-1} \left( -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \left( \frac{\cos r}{r} \right). \quad (11.24)$$

Первая серия решений соответствует полям в резонаторах, не имеющим сингулярности при  $r = 0$ . Вторая серия в этой точке сингулярна, соответствует излучателю в начале координат. При этом число  $l$  определяет номер мультипольности излучателя, а соответствующая угловая часть – диаграмму направленности.

### 11.4.3. Низшие моды

Действие оператора  $K_-$  (коммутация с вектором  $\mathbf{k}_-$ ) приводит к модам с меньшими значениями  $m$ , при этом радиальная функция не меняется.

Например, при  $l = 3$

$$\mathbf{E}_{3,3} = f_3(r) \left( 0, 1, -i \frac{\xi}{1 - \xi^2} \right) (\sqrt{1 - \xi^2})^3 e^{3i\varphi}.$$

Последовательное коммутирование с вектором  $\mathbf{k}_-$  приводит к модам:

$$\mathbf{E}_{3,2} = [\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,3}] = f_3(r) \left( 0, -4i\xi(1 - \xi^2), -2(1 - 3\xi^2) \right) e^{2i\varphi};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{3,1} &= [\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,2}] = \\ &= f_3(r) \left( 0, 2(1 - \xi^2)(1 - 5\xi^2), -2i\xi(11 - 15\xi^2) \right) \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{3,0} = [\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,1}] = -24 f_3(r) \left( 0, 0, (1 - 5\xi^2) \right).$$

Последняя мода не зависит от угла  $\phi$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{3,-1} &= [\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,0}] = \\ &= -24 f_3(r) \left( 0, 2(1 - \xi^2)(1 - 5\xi^2), -2i\xi(11 - 15\xi^2) \right) \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \\ \mathbf{E}_{3,-2} &= [\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,-1}] = 240 f_3(r) \left( 0, 2i\xi(1 - \xi^2), -(1 - 3\xi^2) \right) e^{-2i\varphi}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{3,-3} = [\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,-2}] = -720 f_3(r) (0, 1, i \frac{\xi}{1-\xi^2}) (\sqrt{1-\xi^2})^3 e^{-3i\varphi}.$$

Коммутатор  $\mathbf{k}_-$  с последним полем приводит к нулевому векторному полю:

$$[\mathbf{k}_-, \mathbf{E}_{3,-2}] = 0.$$

Это также граничная мода, но по отношению к полю Киллинга  $\mathbf{k}_-$ .

Радиальная функция у всех этих мод одинакова. Несингулярная радиальная функция имеет вид:

$$f_3(r) = u_3 = \frac{1}{r^5} (3(5-2r^2) \sin r - (15-r^2)r \cos r),$$

а сингулярная

$$f_3(r) = w_3 = \frac{1}{r^5} (3(5-2r^2) \cos r + (15-r^2)r \sin r).$$

При любом  $l$  центральная мода имеет вид

$$\mathbf{E}_{3,0} = f_l(r) (0, 0, C_l(\xi)),$$

а  $C_l(\xi)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-\xi^2) C_l''(\xi) - 4\xi C_l'(\xi) + (l-1)(l+2) C_l(\xi) = 0. \quad (11.25)$$

Это дифференциальное уравнение Гегенбауэра с индексом  $3/2$ , имеющее решение в виде соответствующих полиномов. Полином  $C_l(\xi) = P'_{l+1}(\xi)$ , где  $P_l(\xi)$  – полином Лежандра.

Все моды могут быть получены из этой центральной моды с помощью коммутации с полями Киллинга  $\mathbf{k}_+$  и  $\mathbf{k}_-$ . Поэтому моды с  $m$  различного знака комплексно сопряжены друг другу (с точностью до множителя), а в каждой серии  $m$  изменяется от  $-l$  до  $+l$ , то есть содержится  $2l+1$  различных мод.

#### 11.4.4. Вторая поляризация

Вспомним, что коммутатор с полем Киллинга и ротор коммутируют (11.13). Поэтому, если мода  $\mathbf{A}$  граничная, то и  $\mathbf{rot A}$  тоже является граничной модой. Поэтому вторую поляризацию можно выразить через ротор первой (11.20):

$$\mathbf{E}_{l,l}^2 = \left( f(r), -\xi f_2(r), i \frac{f_2(r)}{1-\xi^2} \right) (\sqrt{1-\xi^2})^l e^{il\varphi}, \quad (11.26)$$

где

$$f_2(r) = f'(r) + \frac{2}{r} f(r).$$

Далее, коммутируя это поле  $2l$  раз с полем Киллинга  $\mathbf{k}_-$ , получим серию мод с  $(-l \leq m < l)$ . Коммутатор  $\mathbf{k}_-$  с  $\mathbf{E}_{l,-l}^2$  приводит к нулевому полю.

Таким образом, сферические моды радиоволн образуют две поляризации, для одной из которых равна нулю радиальная компонента вектора  $\mathbf{E}$ , а для другой – радиальная компонента вектора  $\mathbf{H}$ . В каждой поляризации содержится бесконечный набор серий, характеризуемый граничным индексом  $l$ , а в каждой серии  $2l + 1$  мод с индексом  $(-l \leq m \leq l)$ .

Так как в дифференциальном уравнении (11.25) собственное значение равно  $(l-1)(l+2)$ , то, в отличие от скалярных мод, минимальное значение  $l = 1$ .

#### 11.5. Спинорные поля

При переходе от декартовой системы к сферической оператор Паули преобразуется в соответствии с преобразованиями операторов дифференцирования:

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial \xi} = \\ &= \sigma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{r} \sigma^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{r \sqrt{1-\xi^2}} \sigma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$



где  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  – стандартные матрицы Паули, не зависящие от координат [67], а матрицы

$$\begin{aligned}
 \sigma^r &= \sigma_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial r}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial r}{\partial \xi} = & (11.27) \\
 &= \sqrt{1 - \xi^2} (\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi) + \xi \sigma_3 = \\
 &= \begin{pmatrix} \xi & \sqrt{1 - \xi^2} e^{-i\varphi} \\ \sqrt{1 - \xi^2} e^{i\varphi} & -\xi \end{pmatrix}; \\
 \sigma^\xi &= \frac{r}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left( \sigma_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right) = \\
 &= -\xi (\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi) + \sqrt{1 - \xi^2} \sigma_3 = \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \xi^2} & -\xi e^{-i\varphi} \\ -\xi e^{i\varphi} & -\sqrt{1 - \xi^2} \end{pmatrix}; \\
 \sigma^\varphi &= r \sqrt{1 - \xi^2} \left( \sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = \\
 &= \sigma_2 \cos \varphi - \sigma_1 \sin \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -i e^{-i\varphi} \\ i e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

зависят только от угловых координат.

В операторе Паули можно выделить радиальную и сферическую части:

$$\hat{D} = \sigma^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \sqrt{1 - \xi^2} \sigma^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sigma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{Y},$$

где

$$\hat{Y} = \sqrt{1 - \xi^2} \sigma^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sigma^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Квадрат оператора Паули вне зависимости от выбранной системы координат является единичной матрицей, умноженной на оператор Лапласа:

$$\hat{D} \cdot \hat{D} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

Однако в сферически симметричных задачах, связанных с оператором Паули (например, в задаче о релятивистском атоме водорода), квадрат оператора Паули может появиться в комбинации

$$\hat{D} \cdot U(r) \hat{D} = U(r) \Delta + \frac{dU(r)}{dr} \left( 1 + \frac{1}{r} (\sigma^r \cdot \hat{Y}) \right). \quad (11.29)$$

Если  $U(r)$  – некая сферически симметричная функция, то оператор

$$\hat{S} = \sigma^r \cdot \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \sqrt{1-\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-i\varphi} \\ -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{i\varphi} & -1 \end{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (11.30)$$

должен быть инвариантным относительно вращений, к описанию которых мы и переходим.

### 11.5.1. Спинорные операторы Киллинга

Спиноры являются двухкомпонентными объектами:

$$\psi = \begin{bmatrix} u(r, \xi, \varphi) \\ v(r, \xi, \varphi) \end{bmatrix}.$$

Бесконечно малые вращения вариации функций скалярными операторами Киллинга

$$\hat{L}_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \hat{L}_{\pm} = e^{\pm i\varphi} \left( \pm i \sqrt{1-\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

с коммутационными соотношениями

$$[\hat{L}_3, \hat{L}_\pm] = \pm i \hat{L}_\pm; \quad [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2i \hat{L}_3$$

дополняют преобразование спиноров матрицами

$$s_+ = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad s_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{bmatrix}; \quad s_3 = \begin{bmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{bmatrix}$$

с аналогичными коммутационными соотношениями

$$[s_3, s_\pm] = \pm i s_\pm; \quad [s_+, s_-] = 2i s_3.$$

Поэтому операторами Киллинга в пространстве спиноров являются операторы

$$\hat{K}_\pm = \hat{L}_\pm + s_\pm; \quad \hat{K}_3 = \hat{L}_3 + s_3$$

с такими же коммутационными соотношениями.

Оператор  $\hat{D}^2$  по своей конструкции (11.28) сферически симметричен:

$$[\hat{K}_i, \hat{D}^2] = 0.$$

Сферическая симметрия оператора  $\hat{S}$  (11.30), коммутирующего с оператором  $(\hat{D} \cdot \hat{D})$ , выражается в том, что он также коммутирует со всеми операторами Киллинга:

$$[(\hat{D} \cdot \hat{D}), \hat{S}] = 0; \quad [\hat{K}_3, \hat{S}] = 0; \quad [\hat{K}_\pm, \hat{S}] = 0.$$

Оператор  $(\hat{D} \cdot \hat{D})$  выражается через операторы Киллинга и оператор  $\hat{S}$ :

$$\hat{D} \cdot \hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \hat{K}_- \cdot \hat{K}_+ + \hat{K}_3^2 + i \hat{K}_3 - \hat{S} + \frac{3}{4} \right). \quad (11.31)$$

Здесь выделяется сферический оператор Лапласа

$$\Delta_Y = \hat{K}_- \cdot \hat{K}_+ + \hat{K}_3^2 + i \hat{K}_3 - \hat{S} + \frac{3}{4} =$$

$$= \partial_\xi((1 - \xi^2) \partial_\xi) + \frac{1}{1 - \xi^2} (\partial_\varphi)^2. \quad (11.32)$$

Применим теперь метод граничных мод к спинорным полям. Сначала найдем условие того, что двухкомпонентный спинор является собственной модой оператора  $\hat{K}_3$ :

$$\psi = \begin{bmatrix} u(\xi) e^{i m_1 \varphi} \\ v(\xi) e^{i m_2 \varphi} \end{bmatrix}; \quad \hat{K}_3 \cdot \psi = i \begin{bmatrix} (m_1 + 1/2) u(\xi) e^{i m_1 \varphi} \\ (m_2 - 1/2) v(\xi) e^{i m_2 \varphi} \end{bmatrix} = i \lambda \psi.$$

Отсюда следует связь показателей  $m_1 = m - 1$ ,  $m_2 = m$ . Тогда

$$\psi = \begin{bmatrix} u(\xi) e^{i(m-1)\varphi} \\ v(\xi) e^{i m \varphi} \end{bmatrix}; \quad \hat{K}_3 \cdot \psi = i \left( m - \frac{1}{2} \right) \psi.$$

Собственное значение оператора  $\hat{K}_3$  полуцелое. Заметим, что сами показатели в компонентах целые ( $m$  — целое).

Теперь найдем граничные моды, обозначив максимальное значение  $m$  индексом  $l$ :

$$\psi_l = \begin{bmatrix} u(\xi) (\sqrt{1 - \xi^2})^{l-1} e^{i(l-1)\varphi} \\ v(\xi) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{i l \varphi} \end{bmatrix}.$$

Из условия  $\hat{K}_+ \psi_l = 0$

$$\hat{K}_+ \psi_l = i \begin{bmatrix} (u'(\xi) - v(\xi)) (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{i l \varphi} \\ v'(\xi) (\sqrt{1 - \xi^2})^{l+1} e^{i(l+1)\varphi} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует  $v'(\xi) = 0$ , что определяет две граничные моды (с  $v_1(\xi) = 0$  и  $v_2(\xi) = 1$ ):

$$\psi_l^- = \begin{bmatrix} (\sqrt{1 - \xi^2})^{l-1} e^{i(l-1)\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \psi_l^+ = \begin{bmatrix} \xi (\sqrt{1 - \xi^2})^{l-1} e^{i(l-1)\varphi} \\ (\sqrt{1 - \xi^2})^l e^{i l \varphi} \end{bmatrix}.$$

Оба эти спинора являются собственными модами оператора  $\hat{K}_3$  с одинаковым собственным значением  $m = l - 1/2$  и собственными модами оператора  $\hat{S}$  (11.30) с собственными значениями

$$\hat{S} \cdot \psi_{lm}^- = (1 - l) \psi_{lm}^-; \quad \hat{S} \cdot \psi_{lm}^+ = (1 + l) \psi_{lm}^+. \quad (11.33)$$

Действие оператора  $\hat{K}_-$  приводит к двум сериям из  $2(l+1)$  функций с меньшими значениями  $m$  (от  $(l-1/2)$  до  $-(l-1/2)$ ), но с теми же самыми собственными значениями оператора  $\hat{S}$ . Первую серию с собственными значениями  $\hat{S}$ , равными  $1-l$ , назовем *отрицательной серией*, а вторую, с собственными значениями  $l+1$ , – *положительной*.

Например, при  $l=2$  имеются четыре отрицательные моды с собственным значением оператора  $\hat{K}_3$ , уменьшающимся от  $3/2i$  до  $-3/2i$ :

$$\begin{aligned}\psi_{2,3/2}^- &= \begin{bmatrix} \sqrt{1-\xi^2} e^{i\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \psi_{2,1/2}^- &= \hat{K}_- \cdot \psi_{2,3/2}^- = i \begin{bmatrix} 2\xi \\ -i\sqrt{1-\xi^2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}; \\ \psi_{2,-1/2}^- &= \hat{K}_- \cdot \psi_{2,1/2}^- = \begin{bmatrix} 2\sqrt{1-\xi^2} e^{-i\varphi} \\ 4\xi \end{bmatrix}; \\ \psi_{2,-3/2}^- &= \hat{K}_- \cdot \psi_{2,-1/2}^- = \begin{bmatrix} 0 \\ -6i\sqrt{1-\xi^2} e^{-i\varphi} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Все эти моды являются собственными векторами оператора  $\hat{S}$  с собственным значением  $1-l=-1$ .

Положительная серия с  $l=2$  – также из четырех мод – порождается действием оператора  $\hat{K}_-$  на спинорную функцию

$$\psi_{2,3/2}^+ = \begin{bmatrix} \xi\sqrt{1-\xi^2} e^{i\varphi} \\ (1-\xi^2) e^{2i\varphi} \end{bmatrix}.$$

Эти моды являются собственными векторами оператора  $\hat{S}$  с собственным значением  $l+1=3$ . Действие оператора  $\hat{K}_-$  на моды  $\psi_{1,-3/2}^{(1)}$  и  $\psi_{1,-3/2}^{(2)}$  дает нуль.

Всего при определенном  $l$  содержится  $4l$  мод. Мы не следили за нормировкой мод, так как это достаточно простая проблема.

Исключительно важную роль играет матрица  $\sigma_r$  (11.27): она переводит моду с заданными  $l$  и  $m$  положительной серии в соответствующую отрицательную моду и наоборот.

### 11.5.2. Разделение переменных

Из предыдущего следует *техника разделения переменных* в задачах со спинорами:

- Угловая часть  $U_{lm}^s$  определяется двумя квантовыми числами  $l > 0$  и  $m$  ( $-(l - 1/2) \leq m \leq l - 1/2$ ), а также *квантовым знаком* серии со значениями  $s = \pm$ .
- Угловая зависимость определяется двумя коммутирующими операторами:  $\hat{K}_3 U_{lm}^s = i m U_{lm}^s$  с полуцелыми собственными значениями и спин-орбитальным оператором  $\hat{S}$ , по-разному действующим на функции разных серий:

$$\hat{S} U_{lm}^- = (1 - l) U_{lm}^-; \quad \hat{S} U_{lm}^+ = (1 + l) U_{lm}^+.$$

Матрица  $\sigma_r$  ( $\sigma_r^2 = 1$ ) меняет местами серии без изменения квантовых чисел:

$$\sigma_r U_{lm}^+ = U_{lm}^-; \quad \sigma_r U_{lm}^- = U_{lm}^+.$$

- Оператор  $\hat{D}$  можно представить в виде

$$\hat{D} = \sigma_r \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{S}}{r} \right). \quad (11.34)$$

- Если волновая функция представлена в виде  $\psi = f(r) U_{lm}^-$ , то

$$\hat{D} \cdot f(r) U_{lm}^- = \left( f'(r) + \frac{1-l}{r} f(r) \right) U_{lm}^+;$$

$$\hat{D} \cdot f(r) U_{lm}^+ = \left( f'(r) + \frac{l+1}{r} f(r) \right) U_{lm}^-.$$

### 11.5.3. Релятивистский атом водорода

В качестве примера использования спинорных сферических мод рассмотрим разделение переменных в задаче о релятивистском атоме водорода. Четырехкомпонентный дираковский спинор представляется через два двухкомпонентных  $\psi_1 = u(r)U_{lm}^-$  и  $\psi_2 = v(r)U_{lm}^+$ , для которых уравнение Дирака определяется системой из двух уравнений [68]:

$$\frac{(E + mc^2 - U)}{c\hbar} \psi_1 + \hat{D} \psi_2 = 0; \quad \frac{(E - mc^2 - U)}{c\hbar} \psi_2 + \hat{D} \psi_1 = 0.$$

После приведения к безразмерному виду и отделения угловой зависимости две функции радиуса  $u(r)$  и  $v(r)$  оказываются подчиненными системе двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (e - 1)u + \frac{a}{r}u + v' + \frac{l+1}{r}v &= 0; \\ (e + 1)v + \frac{a}{r}v - u' + \frac{l-1}{r}u &= 0. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Решение ищется в виде степенных выражений:

$$\begin{aligned} u &= (\dots a_k r^k + a_{k+1} r^{k+1} + \dots) r^{m-1} e^{-hr}; \\ v &= (\dots b_k r^k + b_{k+1} r^{k+1} + \dots) r^{m-1} e^{-hr}. \end{aligned}$$

При максимальной степени  $k = n$

$$a_n(1 - e) + h b_n = 0; \quad a a_n + (1 + e) b_n = 0.$$

Из этой системы уравнений находятся  $h$  и  $e$ :

$$h = \frac{-2x_n}{1+x_n^2}; \quad e = \frac{1-x_n^2}{1+x_n^2}; \quad x_k = \frac{b_k}{a_k}. \quad (11.36)$$

При этом  $e^2 + h^2 = 1$ .

При минимальной степени  $k = 0$  два уравнения

$$q a_0 + (l + m)c_0 = 0; \quad (l - m)a_0 + q b_0 = 0$$

из условия совместности

$$q^2 - l^2 + m^2 = 0$$

определяют степень

$$m = \sqrt{l^2 - q^2}. \quad (11.37)$$

При  $0 < k < n$  из системы уравнений

$$(e - 1) a_k + q a_{k+1} - h b_k + (k + l + m) b_{k+1} = 0;$$

$$h a_k + a_{k+1} (l - m - k) + (1 + e) b_k + a b_{k+1} = 0$$

можно выразить

$$a_{k+1} = \frac{q((1 - e)a_k + h b_k) + (1 + k + l + m)(h a_k + (1 + e) b_k)}{1 + q^2 + k^2 - l^2 + 2m + m^2 + 2k(1 + m)};$$

$$b_{k+1} = \frac{((1 - e)(1 + k - l + m) + a h) a_k + (h(1 + k - l + m) - a(1 + e)) b_k}{1 + q^2 + k^2 - l^2 + 2m + m^2 + 2k(1 + m)}.$$

Так как знаменатели этих выражений одинаковы, то

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= b_{k+1}/a_{k+1} = \\ &= \frac{((1 - e)(1 + k - l + m) + a h) + (h(1 + k - l + m) - a(1 + e)) x_k}{q((1 - e) + h b_k) + (2 + k + l + m)(h a_k + (1 + e) x_k)}. \end{aligned}$$

Подставив теперь сюда  $h$  и  $e$  из (11.36), получаем достаточно простое выражение для  $x_k$ :

$$x_{k+1} = \frac{(l - k - m)x_n - q}{k + l + m - q x_n}; \quad x_k = \frac{q + (k + m - l)x_n}{q x_n - k - m - l}. \quad (11.38)$$

Замечательно, что это не рекуррентное соотношение, а явное выражение для  $x_k$ . В частности,  $x_n$  определяется при  $k = n$ :

$$x_n = \frac{q + (n + m - l) x_n}{q x_n - n - l - m},$$



что дает квадратное уравнение

$$q x_n^2 - 2(m+n)x_n - q = 0$$

с корнями

$$x_n^\pm = \frac{m+n \pm \sqrt{(m+n)^2 + q^2}}{q},$$

из которых отбирается первый, приводящий к положительному  $h$ . Окончательные выражения для энергии и коэффициента  $h$  требуют подстановки  $m$  из (11.37):

$$e_n = \frac{m+n}{\sqrt{q^2 + (m+n)^2}}; \quad h = \frac{q}{\sqrt{q^2 + (m+n)^2}}. \quad (11.39)$$

Имеется и вторая серия решений с  $\psi_1 = u(r)U_{lm}^+$  и  $\psi_2 = v(r)U_{lm}^-$ , для которой безразмерные радиальные уравнения слегка отличаются от (11.35):

$$\begin{aligned} (e-1)u + \frac{a}{r}u + v' + \frac{1-l}{r}v &= 0; \\ (e+1)v + \frac{a}{r}v - u' - \frac{1+l}{r}u &= 0. \end{aligned} \quad (11.40)$$

При этом в соответствующих уравнениях меняется  $l$  на  $-l$ , например, (11.38) принимает вид

$$x_k = \frac{q + (k+m+l)x_n}{q x_n - k - m + l},$$

но выражение (11.37) для степени  $m$ , в которое входит  $l^2$ , и уровни энергии (11.39) не меняются.

# Глава 12

## Уравнение Дирака в гравитационном поле

*В метрике Пэнлеве удается точно сформулировать релятивистскую квантовую задачу – уравнение Дирака в центрально симметричном гравитационном поле. Гравитационный радиус центрального тела проявляется как особая точка в системе дифференциальных уравнений. Выбор между метриками Шварцшильда и Пэнлеве является осознанием физической реальности, а не вопросом удобства исследователя.*

### 12.1. Введение

Как было показано в четвертой главе, гравитирующие свойства масс во времена, относительно близкие к моменту  $-t_0$  (моменту Большого взрыва), существенно большие, чем в настоящее время. Видимо, и гравитационное взаимодействие элементарных частиц было несравненно сильнее, чем в настоящий момент, и могло оказаться даже более существенным, чем электромагнитное. Поэтому решение квантовой задачи с учетом динамики пространства оказывается уже не праздным занятием.

Хотя метрика расширяющегося пространства динамична, однако, если речь идет о квантовых системах, то возникающие при решении квантовых задач частоты колебаний определяют периоды очень малые по сравнению со временем заметного изменения поля скоростей, так что решение стационарных задач вполне оправданно.

Обычный подход к задачам такого типа опирается на урав-

нение Шредингера, как-то приспособленного к метрике Шварцшильда. Следует, однако, заметить, что в квантовых задачах выбор переменной времени не является *вопросом удобства*. Общая теория относительности создана для описания локально лоренц-инвариантных явлений. Это относится и к электромагнитному полю. Однако квантовая механика (а также термодинамика) имеет дело с распределенным объектом – волновой функцией (статистической суммой), изменяющейся со временем, по крайней мере, в конечной области пространства, и выбор различного времени в различных точках противоречит физической сути квантовой механики. Не только квантовой теории гравитации, но и квантовой теории частиц в искривленном пространстве–времени.

Поэтому приведение пространственно–временной конфигурации к глобальному времени является физическим требованием.

При описании квантовой системы мы вынуждены затрагивать и области вблизи гравитационного радиуса, где любое движение является релятивистским, поэтому, если нашей целью является не нахождение численных поправок к имеющимся решениям классической квантовой механики, а принципиальное исследование проблемы, с неизбежностью приходится использовать релятивистское уравнение Дирака.

Сначала мы рассмотрим квантовую задачу о движении свободной частицы в метрике Пэнлеве, а затем, по возможности, изучим квантовую динамику электрона в атоме водорода с учетом гравитации.

## 12.2. Уравнение Дирака в метрике Пэнлеве

Уравнение Дирака после разделения переменных, описанного в предыдущей главе (11.35), приводится к безразмерному виду выбором радиального масштаба, равного де-бройлевской

длине волны частицы, определяемой ее массой [68]  $\lambda = \hbar/mc$ :

$$(e - 1)u - iV(r)u' + \left(v' + \frac{1+l}{r}v\right) = 0; \quad (12.1)$$

$$(e + 1)v - iV(r)v' - \left(u' + \frac{1-l}{r}u\right) = 0.$$

В частности, для свободной частицы в метрике Пэнлеве  $V = \sqrt{r_g/r}$ , и система принимает вид:

$$(e - 1)u - i\sqrt{\frac{r_g}{r}}u' + \left(v' + \frac{1+l}{r}v\right) = 0; \quad (12.2)$$

$$(e + 1)v - i\sqrt{\frac{r_g}{r}}v' - \left(u' + \frac{1-l}{r}u\right) = 0.$$

Здесь в выбранной системе единиц

$$r_g = \frac{2kM}{c^2\lambda} = \frac{2kMm}{\hbar c} = \frac{2kMm}{q^2} \frac{q^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \frac{2kMm}{q^2}.$$

Величина  $2kMm/q^2$  определяет отношение величины гравитационного взаимодействия к электромагнитному, причем *тяготеющая масса*  $M$  меняется с течением времени (см. гл. 4), а инерциальная  $m$  остается неизменной.

Из линейной системы (12.2) можно выразить производные  $u'(r)$  и  $v'(r)$ :

$$u' = \frac{r((l-1)u + (e+1)rv) + i\sqrt{r_g}\sqrt{r}((e-1)ru + (l+1)v)}{r(r-r_g)};$$

$$v' = \frac{r((1-e)ru - (l+1)v) - i\sqrt{r_g}\sqrt{r}((l-1)u + (e+1)rv)}{r(r-r_g)}.$$

(12.3)

Замечательно, что гравитационный радиус, не определяющий явно в исходном уравнении Дирака (12.2) каких-либо особенностей, с математической точки зрения оказался особой точкой системы (12.3). Особыми точками системы являются  $r = 0$ ,  $r = r_g$ ,  $r = \infty$ .

В окрестности нуля система ведет себя степенным образом: каждая составляющая – вещественная и мнимая – является регулярной в нуле функцией, умноженной на некоторую степень радиуса.

В эту систему мнимая единица входит с полуцелой степенью радиуса, поэтому, отделяя мнимую часть от вещественной и подобрав степени радиуса перед каждой функцией, чтобы они были регулярными в нуле, решение следует выбирать в виде

$$u = a(r) + i b(r) \sqrt{r_g} r^{3/2};$$

$$v = c(r) r^2 + i d(r) \sqrt{r_g} r^{1/2}.$$

Также при  $r = 0$  должны еще выполняться соотношения

$$2(e-1)a(0) + 3r_g b(0) = 0; \quad (l-1)a(0) - (l+1)r_g d(0) = 0;$$

$$(e-1)a(0) + r_g((l-1)b(0) - 2c(0) + (e+1)d(0)) = 0. \quad (12.4)$$

Этот набор условий – условия регулярности в нуле функций  $a(r)$ ,  $b(r)$ ,  $c(r)$ ,  $d(r)$ , которые теперь можно выразить как функции аргумента  $r - r_g$ .

В окрестности точки  $r = r_g$  эти функции представляются в виде полиномов по  $r - r_g$ , для регуляризации в точке  $r_g$  умножаемых на  $(r - r_g)^{m_i}$ , каждая со своим показателем  $m_i$ , а для регуляризации на бесконечности умноженных на общий множитель  $e^{h(r-r_g)}$ .

Коэффициент  $h$ , как и в случае обычного уравнения Дирака, находится из условия обрыва рядов.

Физическая задача свелась к строго определенной математической.

### 12.3. Произвольное поле скоростей

И в случае произвольного поля скоростей  $V(r)$  особенность системы дифференциальных уравнений, выражаемой из (12.1), определяется гравитационным радиусом  $V(r)^2 = 1$ :

$$u' = \frac{((l-1)u + (e+1)rv) + iV((e-1)ru + (l+1)v)}{r(1-V^2)}; \quad (12.5)$$

$$v' = \frac{((1-e)ru - (l+1)v) - iV((l-1)u + (e+1)rv)}{r(1-V^2)}.$$

### 12.4. Атом водорода с учетом гравитации

Гравитационное поле заряженной частицы определяется метрикой Рейсснера–Нордстрема:

$$ds^2 = U(r) dt^2 - \frac{dr^2}{U(r)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2); \quad (12.6)$$

$$U(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}.$$

От метрики Шварцшильда она отличается только измененной компонентой поля скоростей  $U(r)$ , а потому аналогично приводится к глобальному времени:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{q^2}{r^2}} dr dt - dl^2, \quad (12.7)$$

где

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

– метрика в трехмерном евклидовом пространстве в сферической системе координат. Таким образом, и с учетом электростатического поля заряда в глобальном времени пространство остается евклидовым.

Уравнение Дирака содержит уже как поле скоростей, так и электростатический потенциал:

$$\left(e + \frac{q}{r} - 1\right) u - i V(r) u' + \left(v' + \frac{1+l}{r} v\right) = 0; \quad (12.8)$$

$$\left(e + \frac{q}{r} + 1\right) v - i V(r) v' - \left(u' + \frac{1-l}{r} u\right) = 0,$$

где

$$V(r) = \frac{\sqrt{2Mr - q^2}}{r}.$$

Функции  $u$  и  $v$  опять оказываются комплексными, и после разделения вещественной и мнимой частей получается система четырех линейных уравнений, знаменатель каждого из которых

$$r^2(1 - V^2) = r^2 - 2Mr + q^2, \quad (12.9)$$

то есть особыми точками системы являются кроме  $r = 0$ ,  $r = \infty$  дополнительно уже два корня компоненты  $g_{00}$  метрики Рейснера–Нордстрема.

## 12.5. Заключение

Решение полученных систем уравнений с учетом нетривиальных дополнительных условий вроде (12.4), а также требования обрыва рядов по  $r - r_g$  является хотя и не простой, но уже чисто математической задачей. Необходимо также и осознание роли особенности гравитационного радиуса. В принципе, решения существуют во всем трехмерном евклидовом пространстве, но можно ли одинаково физически трактовать решения под гравитационным радиусом?

Заметим, что в шварцшильдовых координатах решение под гравитационным радиусом бессмысленно, потому что там пространство псевдориманово. Поэтому выбор между метриками Шварцшильда и Пенлеве является осознанием физической реальности, а не вопросом удобства исследователя.

# Глава 13

## О квантово-механическом описании

В квантовой теории гравитации помимо технической проблемы, связанной с равенством нулю гамильтониана в ОТО, которая разрешается, как мы показали, отказом от требования общей ковариантности, существует серьезная проблема физической интерпретации квантового состояния. Вероятностная трактовка вектора состояния электронов, фотонов не может быть отвергнута априори. Но как быть с квантовым состоянием, описывающим, например, масштаб нашего расширяющегося Мира? О каких вероятностях здесь может вестись речь, если наш Мир уникален? В данной главе проводится анализ современных подходов к интерпретации квантовых состояний.

### 13.1. Корпускулярно-волновой дуализм

Квантовая механика является рабочим инструментом для создателей электронных приборов. В то же время, ее физическая трактовка связана с “волнами вероятности”, “принципиальной ненаблюдаемостью...”, чуть ли не необходимостью включать в описание состояний квантово-механических объектов человеческое сознание и прочими заклинаниями.

Действительно, на микроуровне исследователи столкнулись и с вероятностями, и с тем, что называют *корпускулярно-волновой дуализм*. И фотоны рентгеновских лучей, и электроны, и другие микрочастицы обладают индивидуальностью части-



цы, могут сталкиваться, обладают энергией и импульсом, сохранение которых строго соблюдается при столкновениях. В то же время и электроны, и рентгеновские лучи, и даже такие большие по микромасштабам конструкции, как фуллерены, дифрагируют на кристаллических решетках, проявляя несомненно волновые свойства.

К началу XX века волны четко отделялись от частиц. Например, катодные лучи отклонялись магнитным и электрическим полями в соответствии с формулами для частиц определенного заряда, массы, скорости. Именно используя это их свойство, Дж. Дж. Томсон установил физические параметры электрона как частицы.

После открытия рентгеновских лучей встал вопрос и об их природе: волны это или частицы? Они не отклоняются ни электрическим, ни магнитным полем. Но, может быть, это поток незаряженных частиц?

В 1899 году Г. Хага и С.Г. Винд из Гронингенского университета получили фотографию в рентгеновских лучах узкой клинообразной щели, прорезанной в платиновой пластинке толщиной 0.5 мм, и имевшей в наиболее широкой части ширину несколько микрон. На фотографии было отчетливо заметно дифракционное расширение по мере сужения щели, по которому они оценили длину волны порядка 0.2 нм. Ч. Баркла в 1904 году обнаружил поляризацию рентгеновских лучей. Все это говорило о волновых свойствах рентгеновских лучей.

Однако Дж. Дж. Томсон в “Силливановских лекциях” 1903 года отметил сложность представления рентгеновского излучения волнами:

“Рентгеновы лучи способны преодолевать большие расстояния в газах, и по мере прохождения сквозь газ они его ионизируют. Однако число молекул, расщепляющихся таким образом, чрезвычайно мало (меньше миллиардной от общего их числа) даже в слу-

чае интенсивного облучения. Теперь, если условия во фронте волны однородны, то все молекулы газа оказываются в одинаковых условиях. Так почему же тогда расщепляется только малая их доля?”

Для объяснения этого феномена Томсон вводит модель *игольчатого излучения*:

“Трудность объяснения малой ионизации устраняется, если вместо того, чтобы считать волновой фронт рентгеновского излучения однородным, мы допустим, что он состоит из “крупинок” большой интенсивности, разделенных значительными интервалами, интенсивность которых очень мала.”

Эту картину (со стороны видимого света) в 1905 году существенно развивает Эйнштейн [71]:

“Я и в самом деле думаю, что опыты, касающиеся “излучения черного тела”, фотолюминесценция, возникновения катодных лучей при освещении ультрафиолетовыми лучами и других групп явлений, связанных с возникновением и превращением света, лучше объясняются предположением, что энергия света распределена по пространству дискретно. Согласно этому сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком.”

Используя исследования Планка по излучению черного тела, он приписывает каждой такой “крупинке” энергию  $h\nu$ , объясняя этой гипотезой законы фотоэффекта.

Но еще в 1902 году О. Люммер и Е. Герке с помощью зеленых лучей ртутной лампы получили интерференцию с разностью хода в 2600000 длин волн – расстояние порядка одного метра. Позже, в 1920 году, в Маунт-Вильсоновской обсерватории при интерференционном измерении углового диаметра звезды Бетельгейзе была получена интерференция между пучками, прибывшими со звезды на расстоянии около 610 см друг от друга. Казалось невозможным, что эти огромные когерентные пучки могут быть отдельными фотонами.

Поэтому фотонная теория оставалась в круге интересов лишь малого числа энтузиастов (Томсон, Эйнштейн, Штарк). Например, на Сольвеевском конгрессе 1911 года в докладе “Законы теплового излучения и гипотеза кванта действия” Макс Планк писал: “Поэтому в дальнейшем изложении мы исключим гипотезу световых квантов; мы можем это тем более сделать, что до сих пор она не вышла из стадии примитивного развития.”

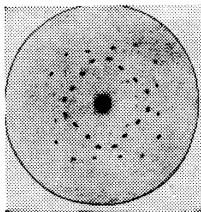
К 1910 году У.Г. Брэгг установил, что рентгеновские лучи не ионизируют газ напрямую, а выбивают из небольшого числа атомов электроны, движущиеся с очень высокой скоростью, и каждый из них ионизирует газ как  $\beta$ -частица, отрывая электроны при последующих столкновениях с молекулами газа. Скорость выброшенного электрона зависит от жесткости (проникающей способности) рентгеновских лучей, а не от их интенсивности или природы атома, из которого вырывается электрон. При этом Брэгг обратил внимание на то, что энергия выбитого электрона практически не отличается от энергии электрона в пучке катодных лучей, возбуждающих рентгеновские лучи. Он сформулировал общий принцип:

“Если в атом входит один излучающий объект (альфа, бета, гамма, рентгенов или катодный луч), то появляется один, и только один, объект, несущий энергию входящего... При этом энергия не рассеивается и скорость вторичного бета-луча не зависит от пути,

пройденного рентгеновским лучом, так что последний не может рассеять свою энергию в пути, что говорит о его корпускулярной природе”.

В 1911–1912 годах Ч.Т.Р. Вильсон, используя свой метод фотографирования в пузырьковой камере, полностью подтвердил выводы Брэгга. Вся область, пройденная рентгеновским лучом, была заполнена крошечными черточками и пятнышками, состоящими из капель, осаждавшихся вдоль траекторий вторичных бета-частиц.

В то же время Макс Лауэ (1879–1960) показал, что если рентгеновское излучение имеет электромагнитную природу, то его взаимодействие с кристаллами должно быть аналогично взаимодействию видимого света с дифракционной решеткой.



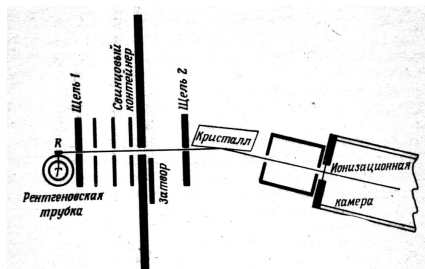
Уже в апреле 1912 г. сотрудникам Макса Лауэ В. Фридриху и П. Книппингу удалось экспериментально получить дифракционную картину при прохождении пучка рентгеновского излучения через кристалл медного купороса.

После этих экспериментов Брэгг писал:

“Мне кажется, проблема уже заключается не в выборе одной из двух теорий рентгеновских лучей, а в нахождении такой теории, которая объединила бы возможности обеих”.

В несомненной двойственности проявления свойств рентгеновских лучей – корпускулярных и волновых – в 1923 году была поставлена точка Артуром Комптоном, показавшим, что рентгеновские лучи, дифрагирующие как волны на кристаллах, представляют собой поток безмассовых частиц – фотонов, летящих со скоростью света, с энергией  $E = h\nu$  и импульсом  $p = E/c = h\nu/c$ . Комптон изучил рассеяние рентгеновских

лучей электронами и показал, что частота рассеянного фотона изменяется по законам сохранения энергии и импульса при столкновении двух частиц.

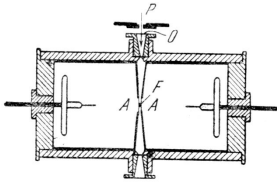


Однако Комптон не наблюдал движение точечных частиц, а измерял лишь импульсы падающего и рассеянного фотонов методом Брэгга, использующим волновые свойства рентгеновского излучения.

После этого исследования Комптона стала несомненной необходимостью построения некоторой картины взаимодействий на атомном уровне и на ее основе – теории атомных явлений. В эксперименте Комптона сталкиваются фотон и электрон, но после столкновения фотон распространяется как волна (его длину волны и измерял Комптон). Связанные с этой дилеммой теоретические дискуссии и новые эксперименты хорошо описаны в статье Э.В. Шпольского “Экспериментальная проверка фотонной теории рассеяния” [73].

В 1924 году появилась статья Н. Бора, Г. Крамерса и Дж. Слетера “Квантовая теория излучения” [74], в которой авторы старались примирить квантовую теорию фотонов с классической электромагнитной теорией Максвелла, для чего они ввели понятие *виртуальных фотонов* и вероятностное толкование волн. Электрон после столкновения летел в определенном направлении, а электромагнитная волна – поток виртуальных фотонов – распространялась в пространстве. При этом законы сохранения импульса и энергии оказываются выполненными только в среднем.

Поставленная ими проблема вызвала серию экспериментальных работ.



В опыте В. Боте и Х. Гейгера два различных счетчика фиксировали электроны отдачи и фотоэлектроны, выбиваемые рассеянными фотонами. При этом наблюдалась строгая корреляция между отсчетами обоих счетчиков.

То есть рассеяние происходило как единый акт, а не вероятностным образом (то вылетит электрон, то фотон).

Еще более прямой эксперимент был поставлен Комптоном и Саймоном в 1925 году. В этом опыте в камере Вильсона фиксировался трек электрона отдачи и трек электрона, выбиваемого на некотором расстоянии от точки рассеяния вторичным фотоном из атомов газа в камере Вильсона. Когда фиксировались оба события, было очевидно, что вторичный фотон и выбитый электрон разлетаются в строгом соответствии с законами сохранения энергии и импульса, на основании которых и вывел формулу изменения частоты Комптон.

Появление в 1923–1924 г.г. серии работ Луи де Бройля, в которых движение электронов также определялось некоторой волной, было уже идеологически подготовлено.

Де Бройль на основании связанной с электроном волны с параметрами, определяемыми параметрами движения соответствующей этой волне частицы – частотой  $\omega = E/\hbar$  и волновым вектором  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  – легко объяснил мистические правила квантования Бора: стационарные орбиты – это такие классические орбиты, на которых укладывается целое число волн.

Теория де Бройля описывала лишь свободные частицы, но в самом начале 1926 года Э. Шредингер сумел распространить ее на движение в заданном потенциальном поле в виде знаменитого *уравнения Шредингера*. Применяв его к осциллятору, он получил *планковский* спектр  $\delta E = \hbar\omega$ , а затем для атома водорода вывел формулу Бальмера–Ридберга. Уравнение Шредингера оказалось мощнейшим рабочим инструментом физики. Применение его в ближайшие последующие годы к сложным атомам,

молекулам, твердому телу приносило лишь либо триумфальное объяснение уже накопленных экспериментальных результатов, либо предсказывало новые явления, сразу же наблюдаемые в экспериментах.

## 13.2. Проблема физического смысла

Но теория Шредингера не давала смысла волновой функции. Основными вычисляемыми в квантовой механике величинами оказались уровни энергии и связывающие их матричные элементы, квадраты которых трактовались как вероятности перехода. Для успешного использования техники квантово-механических вычислений сколь-нибудь последовательное исследование смысла волновой функции и ее динамики совершенно не требовалось. Нужно было овладеть методами решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, теорией возмущений и умением проследивать переход к классической физике при больших квантовых числах. Что касается адекватной физической трактовки, то какая-то трактовка нужна, лишь бы она не отвлекала от практических задач.

На становление общего взгляда на квантовые процессы значительное влияние оказала историческая последовательность развития квантовой механики. Уравнение Шредингера появилось в начале 1926 года, а годом ранее, в 1925, появились статьи Гейзенберга, Борна и Иордана по матричной механике. Была открыта некоммутативность операторов координаты и импульса, из чего появились два идеологических принципа квантовой механики: *соотношение неопределенности* Гейзенберга и *принцип дополненности* Бора.

Матричная механика была только нащупана, Дирак описал ее замкнутую математическую структуру, почти непонятную с точки зрения старой физики. Но уже “отцы-основатели” создали *принципы строения Мира*. Они, конечно, еще искали, сомневались, но последователи, поражаясь необычности созда-

ваемого инструмента, их сомнения принимали как абсолютную истину.

Со времен “Силливановских лекций” Дж. Дж. Томсона (1903 г.) витала идея *вероятности*. Бор в уже упомянутой статье с Крамерсом и Слетером обратились к идее “виртуальных фотонов” и вероятностной трактовке уравнений Максвелла. Макс Борн трактовал матричные элементы в конструкциях Гейзенберга как *амплитуды вероятности*.

В 1927 году состоялся Сольвеевский конгресс, посвященный квантовой механике, на котором “копенгагенцы” во главе с Нильсом Бором (Гейзенберг, Борн, Иордан, Паули) отстаивали “единственно верную интерпретацию квантовой механики”.

Позиция по отношению к квантовой механике де Бройля, Шредингера, Эйнштейна и многих других естествоиспытателей состояла в том, чтобы где-то в ее дебрях найти исходную материальную основу квантовой динамики. В “копенгагенской трактовке” принципиально с гордостью заявляется: “природа устроена исходно вероятностно”. Никаких первичных причинностных материальных законов нет. Волновая функция – чисто математическая конструкция.

На этом конгрессе (и в более поздних исследованиях) обсуждались следующие варианты трактовки квантовой механики:

- “Материальное единство” корпускулярных и волновых свойств. В своей первой работе Эйнштейн полагал, что кванты света – это некоторые сгустки в электромагнитной волне. Луи де Бройль разработал теорию “волны-пилота”, нелинейное уравнение, решение которого состоит из слабой, а потому подчиняющейся принципу суперпозиции, компоненты, которая “направляет” некоторый сгусток (по современной терминологии *солитон*), переносящий энергию. Шредингер также полагал, что волновая функция является реальной, физической волной.
- “Копенгагенцы”, понимая под реальностью точечные ча-



стицы, во главу угла ставили некоммутативность операторов координаты и импульса, из которой следует невозможность одновременно измерить координату и импульс частицы, а потому квантовая механика связалась с теорией измерений, а волны де Бройля трактовались как *волны вероятности*. (Мир устроен столь непостижимо, что лучше и не пытайтесь его понять.) Большим подспорьем копенгагенской трактовке оказалась “теорема о скрытых параметрах” Дж. фон Неймана, грубая формулировка которой состоит в следующем: “Если два оператора не коммутируют, то никакие дополнительные переменные не заставят их коммутировать”.

- Более поздняя “статистическая” трактовка волновой функции: волновые свойства проявляют лишь “ансамбли” классических частиц за счет специфического их взаимодействия (Л. Яноши, Д.И. Блохинцев).

Последнюю точку зрения опровергает эксперимент В.А. Фабриканта, Л.М. Бибермана, Г.М. Сушкина (1949 г.), которые изучали особенности дифракции на кристаллах слабых потоков электронов и, вроде бы, продемонстрировали вероятностную сущность волновой дифракционной картины. В их эксперименте среднее время пролета электрона от катода до фотопластинки примерно в 30000 раз меньше, чем среднее время между испусканием двух последовательных электронов с катода. При таких условиях взаимодействие между электронами, конечно, не играло никакой роли.

И хотя отдельный электрон давал вспышку в одной точке экрана, при последовательном прохождении большого их количества возникала прежняя картина дифракции.

Следует обсудить и “очевидно” наблюдаемые корпускулярные свойства: следы частиц на фотопластинке и люминесцентном экране.

Каждый электрон дает на экране или фотопластинке точку. Это относится и к рентгеновским фотонам. Однако рентгено-структурщики давно заметили, что уменьшение размеров зерен фотопластинки при малых интенсивностях ухудшает изображение. Действует принцип: один фотон – одно зерно. Если зерен много, а фотонов мало, то интерференционные картины оказываются плохо проработанными.

Таким образом, то, что при первом взгляде представляется точкой на фотопластинке, куда попал “точечный” фотон, на самом деле по отношению к фотону оказывается большим зерном, в котором проявляется волновая структура фотона, и фотохимическая реакция в зерне определяется частотой падающей волны.

### 13.3. Трактовки квантовых явлений

Итак, появилась проблема осознания того, что микрочастицы проявляют как волновые свойства (дифракция на кристаллах, волновые функции электрона в атомах, резонансные явления при прохождении барьеров и пр.), так и корпускулярные (попадание на экран или фотопластинку проявляется в виде точки, при столкновениях строго соблюдаются законы сохранения импульса и энергии и пр.).

Наиболее гибко современную трактовку излагает Л. Шифф [68, с. 27]:

#### **“Волновой формализм.**

Таким образом, мы видим, что частицы вещества, равно как и кванты излучения, можно представить в виде волновых пакетов, при наложении которых может иметь место интерференция. Амплитуды волн определяют вероятность нахождения частицы в данной точке... Таким путем, исходя из математического описания волновых движений, можно развить математический аппарат квантовой теории.”

Однако что такое “нахождение частицы в данной точке”? Ответ на этот вопрос отдается нашей интуиции. Из множества книг по квантовой механике четкий ответ нашелся лишь у Гейзенберга [76, с. 12]:

“Под частицей или корпускулой понимают при этом всегда образование, движущееся подобно материальной точке в классической механике.”

У исследователей начала XX века частица ассоциировалась с *материальной точкой*, выплывшей из XIX века. Корпускулярно-волновой дуализм обязывал различные характеристики волн приписывать и частицам. Вот что пишет, например, П.А.М. Дирак в фундаментальной книге “Принципы квантовой механики” [77, с. 15]:

“Таким образом, свойства поляризации света тесно связаны с его корпускулярными свойствами, и отдельному фотону можно приписать определенную поляризацию.”

И вот эта материальная точка вынуждена обладать не только импульсом, энергией, но и поляризацией, спином, а электрон в атоме водорода – еще и вектором Рунге–Ленца.

Невозможность на элементарном *физическом уровне* сочетать волновые свойства со свойствами точечных корпускул, на которых и основывалась доквантовая физика, привела к вероятностной трактовке квантовой механики. Вот как излагает ситуацию Дж. Нейман [78, с. 156]:

“И хотя мы считаем..., что задание  $\varphi$  полностью определяет состояние, оно тем не менее делает возможными лишь статистические утверждения о значении физических величин.”

Проблема состоит вот в чем: открыла ли квантовая механика новую физическую сущность (волновую) в строении вещества или же сущность осталась прежней, классической: вещество – это совокупность материальных точек, – но лишь натолкнулась на проблемы *измерения* параметров этих материальных точек (координат, импульсов).

Приведем аналогию. Появление атомно-молекулярной теории строения вещества, например, заменило представление о твердом теле как о сплошной среде с физической равноправностью окрестностей всех точек внутри тела на структуру, резко неоднородную на размерах порядка ангстрема, состоящую из атомов. Однако подход, примененный затем к интерпретации квантовой механики, предложил бы сохранить представление об однородности вещества, но ввести особые правила измерения, фиксирующие атомарную структуру, которая оказалась бы не свойством вещества, а результатом неких высших ограничений на процесс измерений.

Уже упоминалось, что первая квантово-механическая статья Гейзенберга, в которой он представлял координаты и импульсы матрицами, появилась годом ранее, чем статья Шредингера о волновой функции, в которой тот видел физическую реальность, поэтому лидеры квантовой механики – Вернер Гейзенберг, Макс Борн, Поль Дирак, Паскуаль Йордан, – столкнувшись с проблемой смысла проводимых вычислений еще до открытия волновой функции, вышли на путь вероятностной интерпретации результатов квантово-механических расчетов. Хотя уравнение Шредингера и указывало путь к осознанию новой физической реальности, описываемой волновой функцией, основные силы интенсивно продолжали работать над ограничениями в теории измерений для реальности, описываемой в старых терминах – координатах и импульсах материальных точек. Обсуждались лишь причины этих ограничений (неравенства Гейзенберга): то ли это результат воздействия неких “скрытых параметров”, то ли принципиально нового устройства Мира – не

на основе динамики, а на основе исходно вероятностных законов.

Так как введение “скрытых параметров” для объяснения вероятностного поведения квантовых систем требовало слишком большой изобретательности, и, фактически, ни одной сколь-нибудь законченной модели с такими параметрами предложено не было, восторжествовала точка зрения на принципиальную, изначально вероятностную квантовую динамику:

“До тех пор, пока более подробный анализ положений квантовой механики не позволит нам объективно доказать (в отрицательном смысле) возможность введения скрытых параметров..., мы откажемся от возможности такого объяснения и станем на противоположную точку зрения, т.е. примиримся с тем фактом, что законы, управляющие элементарными процессами (т.е. законы квантовой механики), имеют статистическую природу.” [78, с. 158].

Итак, на атомном уровне распространяются мистические “волны вероятностей”. Это не материальные поля, это поля, определяющие вычисления и определяемые только вычислениями. Но по еще более мистическим законам *точечные материальные частицы* угадывают, чему равен квадрат модуля этой чисто вычислительной, реально не существующей волновой функции, и в соответствии с этой величиной себя вероятно проявляют. Чтобы абсурдность этой картины не очень бросалась в глаза, ситуация еще более затуманена так называемой “квантовой теорией измерений”.

Вот как, например, представлена эта “копенгагенская” идеология, в центре внимания которой стоит не объективная динамика систем внешнего Мира, а процесс измерения, у Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица в “Квантовой механике” [79]:

С. 14. “Таким образом, механика, которой подчиняются атомные явления, – так называемая *квантовая*

или *волновая механика*, – должна быть основана на представлениях о движении, принципиально отличных от представлений классической механики.”

С. 15. “Обычно более общая теория может быть сформулирована логически замкнутым образом независимо от менее общей теории, являющейся ее предельным случаем... Формулировка же основных положений квантовой механики принципиально невозможна без привлечения механики классической.”

“Под измерением в квантовой механике подразумевается всякий процесс взаимодействия между классическими и квантовыми объектами, происходящий независимо от наблюдателя...”

Так, движение электрона в камере Вильсона наблюдается по оставляемому им туманному следу, толщина которого велика по сравнению с атомными размерами; при такой степени точности определения траектории электрон является вполне классическим объектом.

Таким образом, квантовая механика занимает очень своеобразное положение в ряду физических теорий – она содержит классическую механику как свой предельный случай и в то же время нуждается в этом предельном случае для самого своего объяснения.”

С. 17. “Полное описание состояния в классической механике осуществляется заданием в данный момент времени всех ее координат и скоростей; по этим начальным данным уравнения движения полностью определяют поведение системы во все будущие моменты времени. В квантовой механике такое описание принципиально невозможно, поскольку координаты и соответствующие им скорости не существуют

одновременно. Таким образом, описание состояния квантовой системы осуществляется меньшим числом величин, чем в классической механике, т.е. является менее подробным, чем классическое.”

В то же время все монографии и учебники по квантовой механике изучают однозначно определенную уравнением Шредингера динамику волновой функции. Фон Нейман [78, с. 156]:

“Впрочем, эта статистичность ограничена предсказаниями значений физических величин, в то время как прошлые и будущие состояния  $\varphi_i$  вычисляются из  $\varphi_0$  причинным образом. Это позволяет сделать временное уравнение Шредингера...”

Однако несмотря на полное осознание динамичности волновой функции вместо изучения связанной с ней новой (волновой) реальности, продолжается вероятностное рассмотрение координат и импульсов, а самой волновой функции приписывается лишь вычислительный аспект. Ландау и Лифшиц [79]:

С. 19. “Основу математического аппарата квантовой механики составляет утверждение, что состояние системы может быть описано определенной (вообще говоря, комплексной) функцией координат  $\Psi(q)$ , причем квадрат модуля этой функции определяет распределение вероятностей значений координат:  $|\Psi|^2 dq$  есть вероятность того, что произведенное над системой измерение обнаружит значение координат в элементе  $dq$  конфигурационного пространства. Функция  $\Psi$  называется *волновой функцией* системы.”

С.21. “Тогда принимается, что всякая линейная комбинация  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , т.е. всякая функция вида  $c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$  ( $c_1, c_2$  – постоянные), описывает состояние, в

котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2...

Эти утверждения составляют содержание так называемого *принципа суперпозиции состояний* – основного положительного принципа квантовой механики. Из него следует, в частности, что все уравнения, которым удовлетворяют волновые функции, должны быть линейными по  $\Psi$ .”

С. 41. “Необратимость же процесса измерения вносит в квантовые явления физическую неэквивалентность обоих направлений времени, т.е. приводит к появлению различия между будущим и прошедшим.”

Волновая функция в этом толковании лишена объективной реальности, хотя именно она определяет физические характеристики частиц – импульс, энергию, спин и пр., – а уравнение Шредингера однозначно определяет ее динамику, т.е. изменение этих характеристик с течением времени.

Квантовая механика в вышеприведенных цитатах представляется как та же классическая, в которой, однако, чудесным образом модифицированы способ вычисления и закономерности измерений. Частицы представляют собой точечные объекты, неким вероятностным образом перемещающиеся от точки к точке, но не по траектории, разворачивающейся во времени, так как это запрещено соотношением неопределенности Гейзенберга. Однако это соотношение – чисто математическое, техническое для фурье-спектров любых полей. Частицы к этому соотношению притягиваются лишь *названием* некоторых атрибутов поля атрибутами частиц. Например, координаты пространства представляются как координаты точечных частиц: для поля в резонаторе частица вероятностно заполняет весь резонатор. Два фотона вполне могут находиться в одной точке.

В.А. Фок в статье “О толковании волновой функции, обращенной в прошлое” [80] (автор благодарен А.М. Сатанину за



указание на эту статью) без колебаний пишет:

“Физический смысл волновой функции, как известно, состоит в том, что она позволяет вычислять распределения вероятностей результатов будущих измерений.”

Однако изучение чисто вероятностного ее смысла приводит Фока к выводу об объективности волновой функции вообще:

“Наша цель была — показать, что волновая функция, обращенная к прошлому, имеет определенный физический смысл.”

Представление о точечных частицах на уровне интуиции пришло из классической физики. У катодных лучей измеряли заряд, массу — это же типичные характеристики частиц. Однако уже де Бройль ввел массу как параметр волн электрона и показал, что она определяет связь кинетической энергии с импульсом, которые вычислены через поле без введения каких-либо точечных частиц.

Шредингер, введя заряд, добавил потенциальную энергию, которую *можно трактовать*, исходя из классической физики, как потенциальную энергию классической точечной частицы, усредненной с весом  $|\psi|^2$ , однако трактовка этого веса как плотности вероятности для точечной частицы — это просто удобная интерпретация. Никто и нигде точечного электрона не наблюдал. При расчете квантовых приборов вычисления проводятся исключительно с волновой функцией, а не с точечными частицами, с той или иной вероятностью проходящими потенциальные барьеры.

В рассуждениях о локализации электронов на основе соотношения неопределенностей говорится о необходимости создания волнового пакета с бесконечными импульсами, однако математическое понятие *характеристик* волновых уравнений

приводит к траекториям как бы точечных объектов. Первичным здесь является волновое уравнение, а траектория (характеристика) – это математический объект, следующий из этого уравнения.

И, конечно, никакой вероятностной трактовки уравнений Максвелла как средства определения вероятности “положения” фотона просто не существует.

Комптон измерял конечные значения импульсов фотонов, сталкивающихся с электронами, которые он измерял по волнам – по дифракции на кристаллах, используя технологию Фридриха и Книппинга.

Атомная физика обнаружила новые свойства вещества – волны вместо точечных частиц, однако не классические волны, а квантованные, о которых писали Томсон и Брэгг, волновые кванты, возникающие и исчезающие целиком в конечных областях пространства. Эта физическая проблема, начавшаяся было изучаться в квантовой теории поля, утонула в тонких математических вычислениях перенормировок и аномалий.

Возникла проблема *нелокальных* состояний. Развитие экспериментальной техники для создания сложных квантовых электронных систем привело к возможности наблюдения так называемой “квантовой телепортации” [81] – передачи квантового состояния на расстояние, говорящего об объективности понятия “квантовое состояние”, определяемого волновой функцией, а не только о вероятностях тех или иных значений измеряемых величин.

## 13.4. Волны-частицы

Откуда взялось представление о вероятностном значении  $|\psi|^2$ ?

Проблема корпускулярной или волновой природы света проходит через всю историю оптики, начиная от Декарта и Гюйгенса. Ньютон, открывший интерференционные кольца вокруг

точки соприкосновения линз (кольца Ньютона), был сторонником корпускулярной картины света.

Казалось, что проблема была решена Максвеллом, показавшим, что его система уравнений электродинамики приводит к волновым решениям со скоростью распространения, равной замеренной к тому времени скорости света, и с нужными поляризационными свойствами. При этом *лучи* света представляют лишь коротковолновое приближение волновых решений. В приближении длин волн, стремящихся к нулю, можно рассматривать движение волновых пакетов сколь угодно малых размеров, почти не расплывающихся. В реальности эти пакеты малы по сравнению с нашими макроскопическими масштабами, а времена расплывания много больше времен распространения на наши лабораторные расстояния.

Запишем уравнения Максвелла в отсутствие источников:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{rot} \mathbf{H} = 0; \quad (13.1)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{div} \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu(\mathbf{r})} \mathbf{B}.$$

Для простоты будем рассматривать  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависящими от времени. Линейность уравнений Максвелла позволяет использовать комплексный подход. Представим решение в виде медленно меняющихся амплитуд и быстро изменяющейся общей фазы  $\psi(\mathbf{r}, t)$ :  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) e^{i\psi(\mathbf{r}, t)}$  и т.д. Обозначим  $-\dot{\psi} \equiv \omega$  и  $\nabla\psi \equiv \mathbf{k}$ . Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = e^{i\psi} \left( -i\omega \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right); \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = e^{i\psi} (i[\mathbf{k} \times \mathbf{e}] + \mathbf{rot} \mathbf{e})$$

и т. д. Мнимая часть уравнений дает

$$-\frac{\omega}{c} \mathbf{b} + [\mathbf{k} \times \mathbf{e}] = 0; \quad \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega}{c} \mathbf{e} + \frac{1}{\mu(\mathbf{r})} [\mathbf{k} \times \mathbf{b}] = 0;$$

$$(\mathbf{k} \mathbf{e}) = 0; \quad (\mathbf{k} \mathbf{b}) = 0.$$

Совместность этой системы уравнений приводит к связи  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ :

$$n^2(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} = \mathbf{k}^2; \quad n^2(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}),$$

а восстановив связь  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  с эйконалом  $\psi$ , получаем дифференциальное уравнение первого порядка – *уравнение эйконала*:

$$\frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \psi)^2 = 0. \quad (13.2)$$

Так как мы рассматриваем случай, когда *показатель преломления*  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  не зависит от времени, то можно выбрать решением

$$\psi = \frac{\omega}{c} (\chi(\mathbf{r}) - ct),$$

что приводит к дифференциальному уравнению только по пространственным координатам

$$(\nabla \chi)^2 = n^2(\mathbf{r}); \quad \mathbf{p}^2 = n^2(\mathbf{r}); \quad \mathbf{p} = \nabla \chi.$$

Подобные дифференциальные уравнения первого порядка решаются методом характеристик – линий в пространстве, параметрические уравнения которых

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{p}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = n \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}$$

и определяют лучи, по которым распространяется свет в среде с переменным показателем преломления  $n(\mathbf{r})$ . В случае постоянства показателя преломления лучи оказываются прямыми линиями – свет распространяется прямолинейно.

Вещественная часть уравнений (13.1) определяет связь амплитуд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \quad \rho = \operatorname{Re} \left( \frac{(\mathbf{d} \mathbf{e}) + (\mathbf{h} \mathbf{b})}{8\pi} \right); \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} ([\mathbf{e} \times \mathbf{b}]). \quad (13.3)$$

В классической электродинамике это соотношение трактуется как закон сохранения энергии.

Отметим, что хотя характеристика представляет собой бесконечно тонкую линию, ни с какой реальной точечной частицей (точечным *фотоном*) уравнения не связаны. Это только волновые поля Максвелла. При решении задач взаимодействия электромагнитного поля с электронами на квантовом уровне от электромагнитного поля входят потенциалы. С помощью понятия “фотоны” дается лишь наглядная интерпретация результатов наблюдений и экспериментов.

Совершенно аналогичную процедуру можно проследить и в уравнении Шредингера. Подставляя в уравнение Шредингера

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi$$

волновую функцию в комплексном виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i \frac{S(\mathbf{r}, t)}{\hbar}},$$

получим комплексное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + i \hbar \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2m} (\hbar^2 \Delta A + i \hbar A \Delta S + 2i \hbar \nabla A \nabla S - (\nabla S)^2).$$

Разделим вещественную и мнимую части этого уравнения. Мнимая часть

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{m} \nabla A \nabla S + \frac{1}{2m} A \Delta S,$$

умноженная на  $2A$ , приводит к уравнению

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\nabla S}{m} A^2 \right) = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0;$$

$$\rho = A^2 = |\psi|^2; \quad \mathbf{j} = \frac{1}{m} \bar{\psi} \hat{\mathbf{p}} \psi.$$

Если волновая функция отнормирована ( $\int \rho dV = 1$ ), то это соотношение может трактоваться как *сохранение вероятности* частицы, хотя никаких частиц уравнение не содержит.

Вещественная часть

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + U - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta A \right) = 0$$

представляет собой классическое уравнение Гамильтона–Якоби с квантовой добавкой, пропорциональной  $\hbar^2$ . Для классического действия  $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ ;  $\nabla S = \mathbf{p}$ . Возможность пренебречь последним членом по сравнению с остальными и определяет переход от квантовой механики к классической – *принцип соответствия*.

### 13.4.1. Квантовые характеристики частиц

Наша точка зрения состоит в том, что никаких точечных или почти точечных частиц квантовая механика не описывает, поэтому, в частности, утверждение о плотности вероятности, пропорциональной квадрату модуля амплитуды, является просто бессодержательным.

Рассмотрим, например, определяемую канонической квантовой механикой среднюю потенциальную энергию в основном состоянии атома водорода:

$$\langle U \rangle = -4\pi \int_0^\infty \frac{e^2}{r} u^2(r) r^2 dr.$$

Вероятность нахождения точечного электрона в шаровом слое радиуса  $r$  равна

$$dp = 4\pi u^2(r) r^2 dr.$$

Но как трактовать эту вероятность? Если взять множество атомов, то у одних расстояние электрона от ядра  $r_1$ , у других  $r_2$ ,

и число атомов вокруг того или иного значения определяется этой вероятностью. Тогда одни атомы должны иметь одну потенциальную энергию, другие – другую, и лишь в среднем эта величина определяется указанным интегралом. Или, может быть, у электрона в одном атоме расстояние от ядра в один момент времени равно  $r_1$ , в другой –  $r_2$ ? Но тогда состояние атома не будет стационарным. В то же время, элементарное наблюдение спектра водорода говорит о том, что в соответствующих квантовых состояниях, определяющих спектр, находятся электроны сразу многих атомов. Возражения такого рода обычно снимаются рассуждением, что квантовая механика имеет дело не с вероятностями, а с амплитудами вероятности, но эти рассуждения никогда не доводятся до какого-либо расчета.

Наиболее характерным экспериментом, демонстрирующим корпускулярно-волновой дуализм, является эксперимент Комптона. Определение энергии рассеянного рентгеновского фотона проводится через измерение его длины волны на основе брэгговского отражения, что в этом же эксперименте говорит о явно волновой природе рентгеновского излучения. А расчет зависимости этой энергии от угла рассеяния происходит как при столкновении (точечных) частиц. Записываются законы сохранения импульса и энергии:

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + \frac{p^2}{2m}; \quad \frac{\hbar\omega}{c} = p \cos\psi + \frac{\hbar\omega'}{c} \cos\vartheta; \quad p \sin\psi + \frac{\hbar\omega'}{c} \sin\vartheta = 0$$

и полагается, что это законы сохранения при столкновении частиц. Однако если в соответствии с соотношениями де Бройля представить энергию и импульс электрона через угловую частоту  $\Omega$  и волновое число  $K$ , а импульс фотона записать через волновое число  $k$ :

$$\hbar\Omega = \frac{p^2}{2m}; \quad p = \hbar K; \quad \frac{\hbar\omega}{c} = k,$$

то эти законы сохранения примут вид:

$$\omega = \omega' + \Omega; \quad k = K \cos\psi + k' \cos\vartheta; \quad K \sin\psi + k \sin\vartheta = 0.$$

Это интерференционные соотношения только между волновыми характеристиками фотона и электрона, не включающие в себя точечных частиц. **Все свойства частиц содержатся в их волновых функциях.**

Вернемся к приведенному выше высказыванию Дирака: “Отдельному фотону можно приписать определенную поляризацию.” Поляризация есть проявление *спина* фотона. Хорошо известно в математической физике, что спин определяется тензорной структурой того или иного волнового поля. Конечно, чисто на словах его можно приписать и точечной частице. Однако при описании взаимодействия полей с различной тензорной структурой нужно проводить математические манипуляции именно с полями.

В атомной физике при описании состояния электронов в атоме обнаружено много квантовых чисел, которые должен бы иметь электрон помимо координаты и импульса (пусть одновременно не измеримых). Но все они определяются только волновой функцией. Особенно показательно здесь квантовое число *четность*, прямо отражающее свойство волновой функции, хотя можно просто сказать, что “эта материальная точка имеет такую-то четность”.

Из рассмотрения эксперимента Комптона видно, что понятие “частица” носит чисто образный характер и не используется в квантово-механических расчетах, хотя оказывается удобным.

В методе вторичного квантования появляется понятие *многочастичное состояние* электромагнитного поля, используемое при выводе формулы Планка. Более того, при описании, например, эксперимента Комптона–Саймона необходимо учитывать связанные состояния различных полей (электрон-фотонного), в которых импульсы вторичных фотона и электрона строго коррелированы.



## 13.5. Волновая функция и динамика

В отличие от уравнений динамики Ньютона, являющихся дифференциальными уравнениями второго порядка по времени, что приводит к различным инерционным колебаниям, уравнение Шредингера – дифференциальное уравнение первого порядка по времени, что влечет за собой быстрое отслеживание системой изменений внешних условий, приводящих к изменению волновой функции.

Например, при помещении люминесцирующего газа между полюсами магнита зеemanовское расщепление наступает сразу же после включения тока электромагнита без каких-либо колебаний и релаксаций.

Комментируя эксперимент Штерна–Герлаха по расщеплению энергии атомов в магнитном поле, Эйнштейн [75, 1922 год] пытается понять суть происходящих процессов:

“Магнитные моменты всех атомов выстраиваются вдоль силовых линий магнитного поля, причем примерно половина атомов ориентируется по полю, другая половина – против поля. Естественно напрашивается вопрос: как же получается такая ориентация атомов? ... Атомы в магнитном поле будут прецессировать (ларморова прецессия). Если направление поля меняется медленно, то угол прецессии сохраняется. Поэтому требуемые квантовой теорией углы прецессии ( $0$  и  $\pi$  для атомов серебра, как показывает опыт Штерна и Герлаха) не могут установиться без внешних воздействий, например, без излучения или столкновений.”

Оценивая времена релаксации за счет внешних воздействий ( $\sim 10^9$  с), Эйнштейн заключает: “Во всяком случае эти времена такого порядка, что они не имеют никакого отношения к

эксперименту, так как на опыте время релаксации оказывается меньше, чем  $10^{-4}$  с.”

Обсуждая механизмы ориентации, в качестве первой гипотезы Эйнштейн выдвигает следующую:

“В действительности механизм таков, что атомы никогда не могут попадать в состояние, в котором они квантуются *не полностью*.”

Вся динамика квантовой системы определяется только динамикой волновой функции, и расщепление атомов по энергиям происходит только за счет почти мгновенного расщепления волновой функции.

### 13.6. Волны и вероятность

Вероятностные следствия квантовой механики многократно и с большой точностью проверены множеством экспериментов. Видимо, следует однозначно заявить, что *статистические следствия квантовой механики не подвергаются никакому сомнению*, когда идет речь о множестве частиц. При этом частица – это не материальная точка, а характеристика волнового поля, определяемая в теории поля оператором рождения. Как мы увидели выше, при переходе к описанию микроявлений волновой функцией понятие “материальная точка” просто исчезает, начинает играть роль лишь наглядного образа. Все характеристики частицы, проявляющиеся в экспериментах (энергия, импульс, спин, четность), полностью определяются волновой функцией, динамика которой однозначно подчиняется уравнению Шредингера. Проявление корпускулярных свойств – отклонение в электрическом или магнитном поле – также полностью описывается волновой функцией, подчиняющейся уравнению Шредингера в соответствующем поле.

“Точки” на экране или фотопластинке также описываются взаимодействием волновой функции с атомами зерна. Вероят-

ность появляется только при анализе взаимодействия: почему засветилось это зерно, а не другое, почему распался этот атом, а не другой.

Возьмем к эксперименту Бибермана–Фабриканта–Сушкина. Интенсивный поток электронов, рассеиваясь на кристалле, создает интерференционную картину, но при ослаблении потока на экране видны отдельные вспышки, однако их накопление (например, на фотопластинке за большое время) опять эту интерференционную картину восстанавливает – “прямое доказательство вероятностного характера волновой функции”! Но давайте уберем кристалл и прямо направим поток на экран: мы увидим равномерное свечение экрана. Ослабим теперь интенсивность – на экране будут отдельные случайные вспышки. Проинтегрируем их на фотопластинке – и опять получим равномерную засветку. Вот где проявляется квантовая природа волнового поля.

Удивил бы такой эксперимент, например, Максвелла, Вильяма Томсона? Конечно, нет. Он вполне согласуется с классической статистической теорией. Совершенно очевидно, что изначально постановка эксперимента статистическая: множество электронов вылетает из нагретого катода и ускоряется некоторым потенциалом. Ни в коем случае они не могут попадать только в одну точку. Просто в квантовой теории переход к статистическому описанию оказался более простым. Эксперимент Бибермана–Фабриканта–Сушкина только отсекает трактовку интерференции как результата коллективного взаимодействия.

В системе многих частиц квантовая теория описывает статистические следствия. Квадрат модуля волновой функции определяет плотность частиц, квадрат модуля матричного элемента определяет вероятность перехода между двумя состояниями.

## 13.7. Заключение

Итак:

- Элементарные частицы – фотон, электрон – определяются их волновыми функциями. Связанных с этим понятием точечных или очень малых частиц просто нет, хотя при трактовке явлений они могут оказаться удобными образами. Классические траектории частиц – это характеристики волновых уравнений в высокочастотном приближении. Поэтому заявление о том, что  $|\psi|^2$  определяет плотность вероятности нахождения частицы в данной точке, просто лишено смысла.
- “Соотношение неопределенности” Гейзенберга – это просто математическое соотношение для волновых пакетов. Оно совершенно не имеет отношения к координатам и импульсам точечных частиц. Принцип дополнительности Бора – это выражение унитарных преобразований волновой функции.
- Волновая функция является физической сущностью, полностью определяющей свойства систем на атомном уровне. Ее эволюция описывается динамическим уравнением Шредингера. Однако состояние волновой функции содержит квантовое число – число частиц.
- Статистические закономерности в квантовой механике так же выводятся из динамических уравнений, как и в классической. Это результат применения квантово-механического описания к системе многих статистически независимых частиц, в то время как каждая частица (ее волновая функция) ведет себя строго динамически. Вот для многих частиц  $|\psi|^2$  определяет плотность вероятности.

- Понятие “частица” связано не с точечным объектом, а с операторами рождения и уничтожения при более адекватном описании атомных систем методами вторичного квантования. “Квантовая электродинамика ... может с полным основанием считаться “верной” теорией атомных и молекулярных явлений. Теория Шредингера в применении к этим явлениям может рассматриваться как первое приближение к “верной” теории.” [82].

Видимо, “копенгагенская трактовка” сыграла важную роль на начальной стадии становления квантовой теории, сняв с ученых бремя поиска физического смысла и дав им возможность сосредоточиться на решении конкретных задач. Однако молодость теории уже миновала, и, объявляя бессмысленными более глубокие исследования основ квантовой теории, она превратилась в очевидный тормоз.

Копенгагенская трактовка квантовой механики, привлекающая какие-то принципиально особые вероятностные закономерности, в конце концов приводит к самым неестественным картинам Мира. Примером таких картин является “многомировая” картина Эверетта, в которой полагается существование (где-то в идеальном Мире) множества виртуальных физических миров, определяющих вероятностный смысл волновой функции. Если, например, имеется атом гелия, то он существует во всех или большом числе таких виртуальных миров, при этом в одном электроны расположены одним образом, в другом – другим. В процессе измерения из этих виртуальных миров в реальный выдергивается один, определяющий статистический результат измерения [83].

Довольно модной является картина Мира, требующая включения в волновую функцию сознания наблюдателя [84]. Очевидно, что эти теории, являясь развлечением праздного ума, не дают никакого положительного вклада ни в понимание, ни в инструментарий квантовой теории.

## Глава 14

### Заключение. Красота теории

Что за страшная картина!  
Перед ним его два сына  
Без шоломов и без лат  
Оба мертвые лежат,  
Меч вонзивши друг во друга.

...

... и девица,  
Шамаханская царица,  
Вся сияя как заря,  
Тихо встретила царя.

*А.С. Пушкин*

За сто лет существования общей теории относительности в ней не только не обнаружено каких-либо внутренних математических противоречий, а понято, что это математически непротиворечивая, корректная теория. Но самым главным достоинством общей теории относительности считается ее *красота*. Из тысяч дифирамбов красоте ОТО приведу наиболее растиражированное [13, с. 295]: ОТО “является, пожалуй, самой красивой из существующих физических теорий. Замечательно, что она была построена Эйнштейном чисто дедуктивным путем и лишь в дальнейшем была подтверждена астрономическими наблюдениями.”

Напомним и высказывание о красоте ОТО Субрахманьяна Чандрасекара [27]: “Почему же тогда мы верим этой теории?”

...наше доверие следует из *красоты математического описания природы, которое дает теория.*”

В настоящее время тезис о необычайной красоте ОТО фактически заменил проблему математической корректности (хотя в этом проблемы нет) и попутно проблему соответствия классической теории, – а здесь проблемы серьезные, как показано в главах 1, 3, 4, 5.

В физике XX века идея о красоте как основном критерии эффективности теории получила значительное распространение. Главным апологетом этой идеи явился один из создателей квантовой теории Поль Дирак. В сообщении Королевскому Обществу Эдинбурга [85, с. 240] он говорит:

“Открытие теории относительности сделало необходимой модификацию принципа простоты. Один из, по-видимому, фундаментальных законов природы – это закон тяготения, который согласно Ньютону описывается очень простым уравнением; однако согласно Эйнштейну требуется развитие чрезвычайно сложной техники, прежде чем уравнения закона тяготения можно будет хотя бы только записать. Правда, с точки зрения высшей математики, можно привести аргументы в пользу того, что закон гравитации Эйнштейна на самом деле проще закона Ньютона, но при этом придется приписать достаточно тонкий смысл самому понятию простоты, что в значительной мере разрушает практическое значение принципа простоты в качестве инструмента исследования оснований физики.

Что делает теорию относительности столь привлекательной для физиков, несмотря на то, что она противоречит принципу простоты – это ее поразительная *математическая красота* (mathematical beauty). Это качество поддается определению не более, чем

красота в искусстве, однако обычно без труда понимается теми, кто изучает математику. Теория относительности подняла математическую красоту описания Природы на уровень, никогда прежде не поднимавшийся.”

*Красота – это свойство Объекта, приводящее сознание Субъекта в состояние возвышенного возбуждения.* Понятие красоты с неизбежностью включает и (красивый) объект, и (восхищающийся) субъект. То есть в значительной степени зависит и от субъекта. Представление о красоте среди крокодилов, видимо, отличается от представлений о красоте среди людей. Да и в разных человеческих сообществах представления о красоте различаются. Например, гельминтология развилась благодаря энтузиазму исследователей, увидевших в объектах своего исследования исключительно красивые закономерности. В то же время, вряд ли гельминтологи способны восхищаться уравнениями Эйнштейна.

Но если вернуться к физике, – вот, например, как характеризовал уравнение Шредингера другой создатель квантовой механики Вернер Гейзенберг [86, с. 57]: “Чем больше я размышляю о физической части теории Шредингера, тем ужаснее она мне кажется.” В своем нащупывании основ квантовой теории в 1925 году Гейзенберг исходил из позитивистского тезиса (там же, с. 56): “Основная аксиома состоит в том, что при вычислении каких-либо величин, например, энергии, частоты и т.д. должны использоваться соотношения между принципиально наблюдаемыми величинами...” И вдруг появилась какая-то совершенно ненаблюдаемая *волновая функция* – ужасно!

Далее он пишет: “Как известно, математическое оформление в замкнутую теорию было завершено в последующие месяцы Борном и Иорданом в Геттингене и независимо Дираком в Кембридже.”

Посмотрим опять доклад Дирака (с. 248): отличие кванто-



вой механики от Ньютоновой состоит в том,

“что динамические переменные в квантовой механике подчиняются алгебре, в которой аксиома коммутативности не выполняется. Во всем остальном существует чрезвычайно близкая формальная аналогия между квантовой механикой и старой механикой.”

Те совершенно неуклюжие (и, конечно, не изящные), но идущие по пути нахождения закономерностей в спектрах атомов построения Гейзенберга Дирак оформил в строгую математическую теорию преобразований с некоммутирующими переменными, что позволило объединить квантовую механику, идущую от Гейзенберга, с “ужасной” волновой механикой Шредингера.

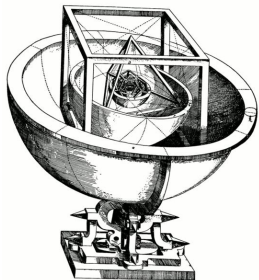
Основной дар Дирака – построение замкнутых математических конструкций на базе идей, витающих где-то на грани интуиции. Его дельта-функция – необходимое в его теории интегральное ядро единичного оператора – была признана математиками лишь через 20 лет. Шедевром математической изобретательности Дирака является квантовое релятивистское уравнение электрона, носящее его имя.

Рассмотрение изящных математических конструкций XX века заставляет вспомнить о другой изящной математической конструкции, созданной почти два тысячелетия назад и входившей в арсенал науки почти полтора тысячелетия, – *теории эпизиклов Птолемея*. Основной идеей астрономических построений в Древней Греции и Египте было представление о движении небесных тел по *самой совершенной кривой* – окружности. Сложное движение планет по небесной сфере Аполлоний и Гиппарх объясняли тем, что центры окружностей, по которым движутся планеты, сами движутся по окружностям – *деферентам*. Птолемей провел громадную работу, вычислив параметры эпизиклов и деферентов для всех известных тогда планет и проверив предсказательную способность своих таблиц.

Таблицами Птолемея и его теорией для предсказания, например, *большого парада планет* пользовались до XIX века, несмотря на существовавшую уже гелиоцентрическую теорию Коперника. Теория эпициклов Птолемея была *самой совершенной теорией* в течение полутора тысяч лет. Изучали ее лишь лица с хорошим математическим образованием и высокой эрудицией. В немногочисленной плеяде посвященных в эту теорию оказался Николай Коперник.

И при создании теории эпициклов, и при ее разрушении Коперником принцип *красоты* играл далеко не последнюю роль. Только творческое возбуждение, красота изучаемого объекта позволяли сконцентрировать мысль на поиске оптимального решения сложных задач.

Творчество Иоганна Кеплера пронизано поиском Мировой Гармонии. Начинал он с поиска закономерностей радиусов



орбит планет (окружностей – самых совершенных кривых). Ведь не могут же радиусы планетарных орбит (как сейчас – массы элементарных частиц) быть какими-то случайными величинами. Должна быть строгая закономерность – и он вписывал радиусы планет в *идеальные платоновы фигуры*.

Однако обрабатывая результаты более чем 20-летних наблюдений Тихо Браге за планетами, Кеплер пришел к *ужасному* выводу: планеты движутся не по самым идеальным кривым, не по окружностям, – а по эллипсам. Но тем самым положил начало объяснению формы орбиты не из эстетического представления об идеальности, начало поиску *закономерностей движения*, завершеному Ньютоном.

В истории науки эстетические основы законов постепенно переходят в естественно-научные. Но вернемся опять к докладу Дирака (с. 241):

“Общая теория относительности включает следующий шаг такого же характера, хотя возрастание красоты на этот раз обычно считается меньшим, чем в случае специальной теории, вследствие чего в справедливость общей теории верят не так твердо, как в случае специальной теории.

Итак, мы видим, что должны заменить принцип простоты на *принцип математической красоты*. Исследователь в своих усилиях выразить фундаментальные законы Природы в математической физике должен бороться главным образом за математическую красоту. Надо по-прежнему принимать во внимание простоту, но она должна быть подчинена математической красоте. (Например, Эйнштейн, выбирая закон гравитации, взял простейший, совместимый с его пространственно-временным континуумом, и это привело его к успеху.) Часто случается, что требования простоты и красоты совпадают. Но если они сталкиваются, то следует отдавать предпочтение последним.”

Но совершенно очевидно, что и Гейзенберг, расписывая наблюдаемые в матрицы и пытаясь подобрать связь между матрицами, описывающими различные динамические переменные, и Шредингер, уродуя изящное релятивистское выражение для волн де Бройля, чтобы вставить туда потенциальную энергию, искали не изящество завершенной теории, а те ключи, которые помогут заглянуть в закономерности природы. Проверка на *изящество* – это уже последние штрихи созданного, экспериментально проверенного раздела науки.

При этом, видимо, нужно различать математическую красоту теории и ее естественно-научную гармонию. Математическая сторона общей теории относительности великолепна. Это прямое следствие великолепия математической теории много-

мерных римановых пространств, разработанной в конце XIX века Риманом, Кристоффелем, итальянской школой Риччи.

Есть явные достижения ОТО и в физике. Приведем лишь пару примеров, в которых общая теория относительности существенно расширяет аналогичные классические задачи.

В ОТО гравитационный потенциал  $\phi$  связан с *темпом течения времени*  $\tau$ , определяемым для покоящегося в данной точке наблюдателя компонентой четырехмерной метрики ( $c$  – скорость света):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}; \quad d\tau = dt \sqrt{g_{00}}. \quad (14.1)$$

В классической физике потенциал определен с точностью до произвольной константы, не имеющей какого-либо физического смысла, однако ОТО придает этой константе понятный смысл: обращение потенциала на бесконечности в нуль определяет связь между темпом течения времени у данного наблюдателя и временем на бесконечности, вдали от гравитирующих тел. Более того, на бесконечности пространство может оказаться не плоским пространством Минковского, а римановым, например, трехмерной сферой, – и для этого случая классическая теория гравитации бессильна, однако ОТО определяет решения и для него.

Вторым примером является движение материальной точки вблизи массивного тела. Уже рассмотрение этой задачи Ньютоном, приведшее к траекториям в виде конических сечений, дает их достаточно большое разнообразие: эллипсы, параболы, гиперболы с различными параметрами. Однако в главе 2 продемонстрировано несравненно большее богатство релятивистских траекторий.

Неким единым образом описываются гравитационные волны и задачи космологии.

Однако общая картина Мира с точки зрения ОТО очень удручающая: ОТО описывает не динамику пространства во времени, а пространственно–временное четырехмерное многообра-

зие, в котором свое пространство и свое время выделяют лишь различным образом движущиеся (где?) наблюдатели. Вследствие этого решения уравнений Эйнштейна описывают единообразно и прошлое, и настоящее, и будущее. Нет динамики, развития Мира в целом. Неслучайно поэтому в приведенной выше цитате Дирака говорится: "...в справедливость общей теории верят не так твердо".

В проблеме пространства и времени современная наука оказалась еще в самом начале пути. В той же цитате Дирака есть слова: "Эйнштейн, выбирая закон гравитации, взял простейший, совместимый с его пространственно-временным континуумом, и это привело его к успеху." Как мы видим, останавливаться на *простейшем законе* преждевременно.

Все знают, что в пространстве, по крайней мере, нашего ближайшего окружения, действует евклидова геометрия. Почему? "*Потому что это самое изящное* (до общей теории относительности) *творение разума.*" Носителем геометрических свойств является *физический объект – пространство*. Но в исследовании этого направления сделаны лишь первые шаги.

Обратимся к размышлениям одного из самых проницательных умов – математика Анри Пуанкаре [87, с. 63, 1898 г.]:

"... если принципы механики не имеют иного источника, кроме опыта, не являются ли они в силу этого только приближенными и временными? Не могут ли новые опыты когда-нибудь видоизменить эти принципы или даже совсем отказаться от них?"

Трудность решения этих естественно возникающих вопросов происходит главным образом от того, что руководства по механике не вполне ясно различают, где опыт, где математическое суждение, где условное соглашение, где гипотеза.

Это еще не все:

- 1) Абсолютного пространства не существует, мы познаем только относительные движения; между тем механические факты чаще всего излагают так, как если бы существовало абсолютное пространство, к которому их можно было бы отнести.
- 2) Не существует абсолютного времени; утверждение, что два промежутка времени равны, само по себе не имеет смысла и можно принять его только *условно*. ”

Пуанкаре рассуждает в стиле доминирующего в научных кругах его времени *позитивизма*: “мы познаем”, где в центре внимания – наши восприятия и наше сознание, – в отличие от основной проблемы натуральной философии: “мы пытаемся понять...”, где в центре – окружающий Мир и его закономерности. Понять не просто некоторые принципы, являющиеся руководством для исследователя, а законы, следующие из этой конструкции Мира. Исследователь не может не иметь некоторой идеализированной модели исследуемого объекта в окружающем мире, которую, однако, не сочиняет, а она выстраивается на основе опыта предыдущих поколений и его собственного опыта.

Вот как этот процесс описывает тонкий экспериментатор, Нобелевский лауреат 1905 года Филипп Ленард [88, с. 4]:

“И все же стремление смело предвосхищать факты, создавая гипотезы, всегда останется одним из прекраснейших и плодотворнейших преимуществ естествоиспытателя. Только он не должен при этом идти напролом, а, напротив, должен быть готовым каждую минуту преклониться перед фактами, никогда не забывая, что если какая-либо из его гипотез длительно выдерживает проверку на фактах действительности и, следовательно, знаменует собою некоторое открытие, то это является только случайностью. И раз он хочет остаться добросовестным, то

лишь после долгих колебаний может он признать и выдать за истину то, что сначала было только гипотезой и творчеством его духа.”

У исследователей, имеющих дело с формулами, эстетические взгляды в науке немного другие, чем у экспериментаторов. И это совершенно естественно, но отсюда следует, что окончательную восхитительность какой-либо теории диктует ее истинность. На странице 31 того же сочинения мы читаем мнение Ленарда и об общей теории относительности:

“Можно также сказать, что в обобщенном принципе относительности мы имеем дело с системой угадывания процессов природы, системой, облеченной в форму математических количественных отношений. Такое предсказывание с помощью достаточно обширного математического аппарата вообще играет в современной физике значительную роль по сравнению с прежним временем. Укажем, например, на построения теории квантов. Метод этот оказался чрезвычайно полезным в случаях, когда возможно было наряду с ним прибегнуть к контролю посредством наблюдения. Но было бы ошибкой видеть, по примеру некоторых математиков, конечную цель развития физики в ее превращении в одну из побочных отраслей математики. Природа, исследование которой составляет задачу физики, не так скоро исчерпает свои чудеса, которыми она не перестает поражать даже самых глубоких исследователей.”

Теория упругости в XIX веке пришла к понятию *тензор напряжений*, тем самым вышла на новый уровень математики. Общая теория относительности также вывела науку XX века на новый математический уровень. Этот уровень нужно осваивать, а не просто им восхищаться.

Постепенно становится ясным, что принцип общей ковариантности является барьером для возможной стыковки ОТО с классической физикой. Динамическая теория пространства в глобальном времени [7] показала, что все достоинства ОТО, связанные с римановой геометрией, могут быть сохранены, но при этом сохраняется и глобальное время, и снимается барьер ОТО – нулевой гамильтониан.

Красота лишь завершает проверенную теорию, но не может служить путеводной нитью. Красивым исследователю кажется то, что он знает или угадывает: специальную теорию относительности, механизм Хиггса нарушения симметрии и пр. – и в поиске закономерностей неизведанного исследователь, настроенный на красоту, уже не столько считается с объективными фактами, сколько пытается подогнать факты под свое понятие красоты.

Так произошло с принципом общей ковариантности: из-за его удивительной математической красоты роковые его следствия оказались незамеченными.

Так произошло и с “копенгагенской трактовкой” квантовой механики: как изящны коммутационные соотношения между операторами! Но они следуют лишь из линейности уравнения Шредингера и не имеют никакого отношения к вероятностям. А загадочная непостижимость вероятностных законов не дала заметить, что никаких точечных частиц в атомной физике не наблюдается.



## Список литературы

1. С. Rovelli, L. Smolin // *Phys. Rev. Lett.* **72**, 446, 1994.
2. J.D. Brown, K.V. Kuchař // *Phys. Rev.* **D51**, 5600, 1995.
3. Ю.С. Владимиров. *Системы отсчета в теории гравитации*. М.: Энергоиздат, 1982.
4. Ю.С. Владимиров, Н.В. Мицкевич, Я. Хорски. *Пространство, время, гравитация*. М.: Наука, 1984.
5. Д.Е. Бурланков // *УФН*, **174**, 899, 2004.
6. Д.Е. Бурланков. *Динамика пространства*. Нижний Новгород: ННГУ, 2005.
7. Д.Е. Бурланков. *Время, пространство, тяготение*. М. – Ижевск: РХД, 2006.
8. Д.Е. Бурланков. *Пространство, время, космос, кванты*. Нижний Новгород: ННГУ, 2007.
9. А. Einstein // *Ann. Phys. (Leipzig)* **35**, 898, 1911. [А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов*. Т. 1. С. 165, М.: Наука, 1965].
10. R. Arnovitt, S. Deser, and C.W. Misner // *Phys. Rev.*, **116**, 1322, 1959.
11. C.W. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler. *Gravitation* San Francisco: Freeman, 1974. [Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. *Гравитация*. М.: Мир, 1977].
12. P. Painlevé // *C.R. Acad. Sci. (Paris)*. **173**, 677, 1921.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория поля*. М.: Наука, 1988.

14. A. Einstein // Sitz. preuss. Akad. Wiss. **47**, 831, 1915. [А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*. Т. **1**, С. 439, М.: Наука, 1966].
15. D. Hilbert. // Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen, **3**, 395, 1915.
16. A. Einstein // Naturwiss, VII, 776, 1919. [А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*. Т. **1**, С. 663, М.: Наука, 1966].
17. Леонардо да Винчи. *Избранные естественнонаучные произведения*. М.: АН СССР, 1955.
18. Э. Мах. *Механика*. М.- Ижевск: РХД, 2000.
19. A. Einstein // Sitz. preuss. Akad. Wiss. **2**, 1030, 1914. [А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов*. Т. 1. С. 326, М.: Наука, 1965].
20. В.А. Фок. *Теория пространства, времени и тяготения*. М.: ГИФМЛ, 1961.
21. Y. Nagihara // Jap. J. Astron. Geophys. **8**, 67-175 (1931).
22. S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford, NY: Clarendon Press, 1983. [С. Чандрасекар. *Математическая теория черных дыр*. М.: Мир. 1986].
23. A.S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge, Univ.Press, 1924. [А.С. Эддингтон. *Теория относительности*. Л.-М.: ОНТИ ГИТТЛ, 1934].
24. А.А. Гриб, Ю.В. Павлов // УФН **179** 279-283 (2009).
25. G.C. McVittie, *General Relativity and Cosmology*, London, 1956. [Г.К. Мак-Витти. *Общая теория относительности и космология*. М: ИЛ, 1961].
26. Л. Бриллюэн. *Новый взгляд на теорию относительности*. М.: Мир, 1972.

27. S. Chandrasekhar. *The Aesthetic Base of the General Theory of Relativity*. Karl Swarzschild Lecture. Hamburg, 1986.
28. А.А. Логунов, В.Н. Фоломешкин. ТМФ **32**, 174, 1977.
29. А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, А.А. Власов. *Релятивистская теория гравитации*. М.: Наука, 1987.
30. Л.Д. Фаддеев // УФН **136**, 435, 1982.
31. Э. Уиттекер. *История теорий эфира и электричества*. Т. 2, М.–Ижевск: РХД, 2004.
32. А. Einstein // Ann. Phys. **17**, 891, 1905. [А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. С. 7. М.: Наука, 1965].
33. А. Einstein // Jahrb. Radioakt. u. Elektr. **4**, 411, 1907. [А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. С. 65. М.: Наука, 1965].
34. М. Лауэ. *История физики*, М.: ГИТТЛ, 1956.
35. Г.Б. Малыкин // УФН, **170**, 1325, 2000.
36. А. Пайс. *Гении науки*. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
37. В.Ф. Миткевич. *Основные физические воззрения*. М.–Л.: АН СССР, 1939.
38. А. Пуанкаре. *Последние мысли*. М.–Ижевск: РХД, 2002.
39. D.E. Burlankov // Procs. Int. Conf. BGL-4, 75, N.Novgorod–Kiev, 2004.
40. D.E. Burlankov // arXiv: gr-qc/0406110, 2004; arXiv: gr-qc/0406112, 2004; arXiv: gr-qc/0509050, 2005.

41. A. Einstein, E. Straus // Rev. Mod. Phys., **17**, 120, 1945. [А. Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. **2**. С. 623, ст. 128, М.: Наука, 1965].
42. K. Schwarzschild // Sitz. Deutsch. Acad. Wiss. Berlin Kl. Math. Phys. Tech. **189**, 424, 1916.
43. С.Ю. Губанов. // <http://elementy.ru/blogs/users/sergeygubanov/22058>, 2008.
44. А.М. Мостепаненко. *Пространство и время в макро-, мезо-, и микромире*. М.: ИПЛ, 1974.
45. Э.М. Чудинов // Вопросы философии, № 9, 60, 1968.
46. J. Lense, H. Thirring // Physik. Zeitschr., XIX, 156, 1918.
47. В.Н. Жарков. *Внутреннее строение Земли и планет*. М.: Наука, 1978.
48. M. Tajmar, F. Plesescu, B. Seifert, K. Marhold // ArXiv: gr-qc/0610015.
49. Т.А. Агекян. *Звезды, галактики, Метагалактика*. М.: Наука, 1982.
50. *Физика космоса. Маленькая энциклопедия*. Под ред. Р.А. Сюняева. М.: Советская энциклопедия, 1986.
51. V. Carter // Phys. Rev. **174**, 1559, 1968.
52. И.Д. Новиков, В.П. Фролов. *Физическая теория черных дыр*. М.: Наука, 1987.
53. Р. Руффини. *О гравитационно сколлапсировавших объектах*. / В сб. *Астрофизика, кванты и теория относительности*. С. 397. М.: Мир, 1982.
54. Д.Е. Бурланков. // ЖЭТФ, **93**, 1921, 1987.

55. R.P. Kerr // *Phys. Rev. Lett.* **11**, 237, 1963.
56. D. McManus // *Class. Quant. Grav.* **8**, 863, 1991.
57. J.B. Hartle, K.S. Thorne // *Astrophys. Journ.* **153**, 802, 1968.
58. S.P. Drake, R. Turolla // *Class. Quantum Grav.* **14**, 1883, 1997.
59. R.C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford, 1934. [Р. Толмен. *Относительность, термодинамика и космология*. М.: Наука, 1974].
60. A. Tomimatsu, H. Sato // *Prog. Theor. Phys.* **50**, 95, 1973.
61. B.F. Schutz Jr. // *Phys. Rev. D* **2**, 2762, 1970.
62. Г. Ламб. *Гидродинамика*. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.
63. Дж. Бэтчелор. *Введение в динамику жидкости*. М.: Мир, 1973.
64. *Инвариантная производная по времени*. // Wikipedia.
65. Ф.М. Морс, Г. Фешбах. *Методы теоретической физики*. Т. 2. М.: ИЛ, 1960.
66. Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975.
67. В.А. Фок. *Начала квантовой механики*. М.: Наука, 1976.
68. Л. Шифф. *Квантовая механика*. М.: ИЛ, 1959. [Schiff L I *Quantum Mechanics*. New York: McGraw-Hill Book Co, 1955].
69. T.Regge, J.A. Wheeler // *Phys. Rev.* **108**, 1063, 1957.
70. Д. Е. Бурланков, А.М. Самочадин. *ТМФ* **120**, 342, 1999.

71. A. Einstein // *Ann. Phys.*, **17**, 132, 1905. [А. Эйнштейн. Собрание научных трудов, Т. 3, С. 92. М.: Наука, 1966].
72. М. Планк. Избранные труды. С. 288. М.: Наука, 1975.
73. Э.В. Шпольский // *УФН*, **16**, 458, 1936.
74. Н. Бор. Избранные научные труды. Т. 1. С. 526. М.: Наука, 1970.
75. A. Einstein // *Zs. Phys.* **11**, 31, 1922. [А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов*. Т. 3. С. 442, М.: Наука, 1966].
76. В. Гейзенберг. *Физические принципы квантовой теории*. Л.-М.: ГТТИ, 1932.
77. П.А.М. Дирак. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979.
78. И. фон Нейман. *Математические основы квантовой механики*. М.: Наука, 1964.
79. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика*. М.: Наука, 1989.
80. В.А. Фок // *ЖЭТф*, **18**, 737, 1948.
81. D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, S. Popescu // *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121, 1998.
82. Э. Вихман. *Берклевский курс физики*. Т. IV. *Квантовая физика*. М.: Наука, 1977.
83. Н. Everett // *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454, 1957.
84. М.Б. Менский // *УФН*, **175**, 413, 2005.
85. P.A.M. Dirac. *Proc. Roy. Soc., Edinburg* **A 59**, 122-129, 1938-1939. [П.А.М. Дирак. *К созданию квантовой теории поля*.. С. 245. М.: Наука, 1990].

86. В. Гейзенберг. *Воспоминания об эпохе развития квантовой механики.* / В сб. *Теоретическая физика 20 века.* С. 53. М.: ИИЛ, 1962.
87. А. Пуанкаре. *Наука и гипотеза.* / В сб. *О науке.* С. 5. М.: Наука, 1983.
88. Ф. Ленард. *О принципе относительности, эфире, тяготении.* Перевод под ред. А.К. Тимирязева. Государственное издательство, 1922.